

数チャレ 第111回 (2010年4月)

p を3以上の素数, a, b を自然数とする。以下の間に答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

- (1) $a + b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。
- (2) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。
- (3) $a^2 + b^2$ と $a^3 + b^3$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

出典: 2010年 神戸大学

解答

- (1) p は素数であるから, ab が p の倍数であるとき

$$p|a \text{ または } p|b$$

さらに $p|a + b$ であるとき

$$p|a \text{ ならば } p|b, \quad p|b \text{ ならば } p|a$$

であるから, いずれの場合も a と b はともに p の倍数である。

(おわり)

- (2) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに p の倍数であるとき,

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$$

も p の倍数であり, p は奇素数 (2 と互いに素) であるから

$$ab \text{ は } p \text{ の倍数}$$

である。よって, (1) より a と b はともに p の倍数である。

(おわり)

- (3) $a^3 + b^3 = (a^2 + b^2)(a + b) - ab(a + b)$

であるから, $a^2 + b^2$ と $a^3 + b^3$ がともに p の倍数であるとき

$$ab(a + b) \text{ は } p \text{ の倍数}$$

である。 p は素数であるから

$$p|ab \text{ または } p|a + b$$

- (i) $p|ab$ のとき

$$p|a^2b^2 \text{ かつ } p|a^2 + b^2$$

であるから, (1) より

a^2 と b^2 はともに p の倍数

である。 p は素数であるから , a と b はともに p の倍数である。

(ii) $p \mid a + b$ のとき

$p \mid a^2 + b^2$ であるから , (2)より a と b はともに p の倍数である。

(おわり)