

数チャレ 第112回 (2010年5月)

以下の問いに答えよ。

- (1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。
(2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

出典：2010年 千葉大学 医学部

解答

$$(1) \quad 3^n = (k+1)(k^2 - k + 1) \quad \dots\dots ①$$

$k+1 \geq 2$ に注意して，素因数分解を考えると

$$\begin{cases} k+1 = 3^a \\ k^2 - k + 1 = 3^b \end{cases} \quad (a, b \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots ②$$

と表される。 k を消去すると

$$\begin{aligned} 3^b &= (3^a - 1)^2 - (3^a - 1) + 1 = 3^{2a} - 3 \cdot 3^a + 3 \\ \therefore 3^{b-1} &= 3^a(3^{a-1} - 1) + 1 \end{aligned}$$

ここで， $b-1 \geq 1$ であるとすれば 1 が 3 で割り切れることになって矛盾するから，

$$b-1 = 0 \quad \therefore b = 1$$

このとき

$$\begin{aligned} 3^a(3^{a-1} - 1) &= 0 \\ 3^{a-1} &= 1 \quad \therefore a = 1 \end{aligned}$$

②, ① に $a = b = 1$ を代入して

$$(k, n) = (2, 2) \quad (\text{答})$$

(2) l を整数として

$$(2l)^2 = 4l, \quad (2l+1)^2 = 4(l^2 + l) + 1$$

となるから，

$$k^2 \text{ を } 4 \text{ で割った余りは } 0 \text{ または } 1$$

となる。二項定理より

$$3^n = (4-1)^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$$

であるから，

$$3^n = k^2 - 40 \quad \dots\dots ③$$

より

$$(-1)^n \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{4}$$

となって， n は偶数である。したがって，

$$n = 2m \quad (m \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots ④$$

とおくことができ，③より

$$40 = k^2 - 3^{2m} = (k + 3^m)(k - 3^m)$$

$k + 3^m > 0$, $k + 3^m > k - 3^m$ を考えると, 整数の積の組合せは

$$(k + 3^m, k - 3^m) = (40, 1), (20, 2), (10, 4), (8, 5)$$

の場合で尽くされ,

$$k + 3^m - (k - 3^m) = 2 \cdot 3^m \text{ が偶数}$$

であることより

$$(k + 3^m, k - 3^m) = (20, 2), (10, 4)$$

の場合に絞られる。連立方程式を解いて

$$(k, 3^m) = (11, 9), (7, 3) \quad \therefore (k, m) = (11, 2), (7, 1)$$

④より n を求めて,

$$(k, n) = (11, 4), (7, 2) \quad (\text{答})$$