

## 数チャレ 第113回 (2010年6月)

- (1) 2つの正の既約分数の和が整数ならば、分母は等しいことを示せ。  
(2) 任意の自然数は、分母が相異なる3つの正の既約分数の和で表せることを示せ。

解答

- (1)  $a$  と  $b$ , および  $c$  と  $d$  は互いに素な自然数であるとし,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = n$$

は整数であるとするとき,

$$\frac{a}{b} = n - \frac{c}{d} = \frac{nd - c}{d}$$

$$\therefore ad = b(nd - c)$$

よって、 $ad$  は  $b$  の倍数であるが、 $a$  と  $b$  は互いに素であるから

$$d = bk \quad (k \text{ は自然数})$$

と表される。このとき

$$ak = ad - c = abk - c \quad \therefore c = ak(b - 1)$$

となって  $c$  は  $k$  の倍数となるが、 $c$  と  $d = bk$  は互いに素であるから

$$k = 1 \quad \therefore b = d$$

(おわり)

- (2)  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  と表されるから、任意の自然数  $n$  に対して

$$n - 1 = a + b + c$$

を満たす非負整数  $a, b, c$  を定めると,

$$n = a + b + c + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2a+1}{2} + \frac{3b+1}{3} + \frac{6c+1}{6}$$

$2a+1 (> 0)$  と 2 は互いに素、 $3b+1 (> 0)$  と 3 は互いに素、 $6c+1 (> 0)$  と 6 は互いに素であるから、分母が相異なる3つの正の既約分数の和で表せる。

(おわり)