

## 数チャレ 第114回 (2010年7月)

座標平面上において、格子点を頂点とする一辺の長さ1の正方形を単位正方形と呼ぶことにし、自然数  $n$  に対して双曲線  $xy = n$  が  $1 \leq x \leq n$  において通過する単位正方形の個数を  $a_n$  とする。

- (1) 自然数  $n$  の正の約数の個数を  $t(n)$  で表すとき、 $a_n$  を  $n$  と  $t(n)$  で表せ。  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  を求めよ。

### 解答

- (1)  $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n$  において単位正方形は

$x$  軸方向、 $y$  軸方向ともに  $n - 1$  個ずつ

あり、 $x$  座標、 $y$  座標ともに整数部分は  $n - 2$  回変わるから、 $1 < x < n$  において双曲線  $xy = n$  が格子点を通らないならば、通過する単位正方形の個数は

$$1 + (n - 2) + (n - 2) = 2n - 3$$

である。

$1 < x < n$  において格子点を通るときは、 $x$  軸方向と  $y$  軸方向の2回の整数部分の変化が1回で行われることになるから、 $1 < x < n$  における約数の個数  $t(n) - 2$  の分だけ単位正方形の個数は減り、

$$a_n = 2n - 3 - \{t(n) - 2\} = 2n - 1 - t(n) \quad (\text{答})$$

- (2)  $n$  の約数  $d$  に対して  $\frac{n}{d}$  も  $n$  の約数であるから、

$$0 < d \leq \frac{n}{d} \implies d \leq \sqrt{n}$$

より

$$0 < t(n) \leq 2\sqrt{n}$$

と評価できる。したがって、(1)より

$$2n - 1 - 2\sqrt{n} \leq a_n < 2n - 1$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{a_n}{n} < 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{n} \right) = 2$$

となるから、ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2 \quad (\text{答})$$