

数チャレ 第115回 (2010年8月)

(1) 次の条件(*)を満たす2次正方行列 A が存在することを示せ。

(*) $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ を満たす任意の正整数 a, b に対して,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{となる自然数 } n \text{ が存在する。}$$

(2) 方程式 $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ の正の整数解を小さい方から順に $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ とするとき, x_n, y_n を n の式で表せ。

解答

(1) $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ を満たす正整数 a, b の組を求めてみると,

$$b = 1 \text{ のとき } a^2 = 2 \pm 1 \quad \therefore a = 1$$

$$b = 2 \text{ のとき } a^2 = 8 \pm 1 \quad \therefore a = 3$$

そこで,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおいてみると,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

以下, この行列 A が条件(*)を満たすことを示す。

a, b が $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ を満たす正整数とするとき,

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$c^2 - 2d^2 = (-a + 2b)^2 - 2(a - b)^2 = -a^2 + 2b^2 = \mp 1$$

$c > 0, d > 0$ とすれば

$$a = c + 2d > c, \quad b = c + d > d$$

$a = a_0, b = b_0$ として同様な操作で $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ の正の整数解 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ を求めていくと,

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots, \quad b_0 > b_1 > b_2 > \dots$$

となり, この操作は有限回で終わる。双曲線 $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ の $x \geq 1, y \geq 1$ なる格子点は $-x + 2y < 0$ の範囲にも $x - y < 0$ の範囲にも存在しないから

$$a_n = 0 \text{ または } b_n = 0 \quad (a_{n-1} > 0 \text{ かつ } b_{n-1} > 0)$$

を満たす自然数 n が存在する。 $-2b^2 = \pm 1$ を満たす整数 b は存在しないから

$$a_n = 1, \quad b_n = 0$$

このとき

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(証明おわり)

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2A - E = 0$$

ここで,

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -1$$

とおくと, α, β を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

であり, これを解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$A(A - \alpha E) = \beta(A - \alpha E)$, $A(A - \beta E) = \alpha(A - \beta E)$ より

$$A^n(A - \alpha E) = \beta^n(A - \alpha E), \quad A^n(A - \beta E) = \alpha^n(A - \beta E)$$

であるから, 辺々の差をとって A^{n+1} を消去すると

$$(\alpha - \beta)A^n = \alpha^n(A - \beta E) - \beta^n(A - \alpha E)$$

$$\therefore A^n = \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 - \beta & 2 \\ 1 & 1 - \beta \end{pmatrix} - \frac{\beta^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 2 \\ 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

(1)より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\beta^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} (1 - \beta)\alpha^n - (1 - \alpha)\beta^n \\ \alpha^n - \beta^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2} \\ y_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad (\text{答})$$