

## 数チャレ 第116回 (2010年9月)

$x$  の 3 次方程式

$$x^3 - 76x^2 + 1923x - k = 0$$

の 3 解がすべて整数となるような  $k$  の値を求めよ。

解答

$$f(x) = x^3 - 76x^2 + 1923x \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 152x + 1923 = 3\left(x - \frac{76}{3}\right)^2 - \frac{76^2}{3} + 1923$$

$\frac{76}{3} = 25 + \frac{1}{3}$  に注目してあたりをつけると

$$f'(24) = (3 \times 24 - 152) \times 24 + 1923 = -1920 + 1923 > 0$$

$$f'(25) = (3 \times 25 - 152) \times 25 + 1923 = -1925 + 1923 < 0$$

$$f'(26) = (3 \times 26 - 152) \times 26 + 1923 = -1924 + 1923 < 0$$

$$f'(27) = (3 \times 27 - 152) \times 27 + 1923 = -1917 + 1923 > 0$$

であることがわかるから、

$f(x)$  は  $24 < x < 25$  において極大、 $26 < x < 27$  において極小

となることがわかる。

問題の仮定より、曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = k$  は 3 つの格子点を共有するが、極値を与える点が格子点ではないから相異なる 3 点で交わることになり、中央の交点は極大を与える点と極小を与える点の間にある。上述の評価により、中央の整数値は

$$x = 25 \text{ または } x = 26$$

であることが必要である。

(i)  $k = f(25) = 25 \times (25^2 - 76 \times 25 + 1923) = 16200$  のとき

$$\begin{aligned} x^3 - 76x^2 + 1923x - 16200 &= (x - 25)(x^2 - 51x + 648) \\ &= (x - 25) \left\{ \left(x - \frac{51}{2}\right)^2 - \frac{51^2 - 4 \times 648}{4} \right\} \\ &= (x - 25) \left(x - \frac{51+3}{2}\right) \left(x - \frac{51-3}{2}\right) \\ &= (x - 25)(x - 27)(x - 24) \end{aligned}$$

であるから 3 解とも整数となり、条件を満たす。

(ii)  $k = f(26) = 26 \times (26^2 - 76 \times 26 + 1923) = 26 \times 623$  のとき

$$\begin{aligned} x^3 - 76x^2 + 1923x - 26 \times 623 &= (x - 26)(x^2 - 50x + 623) \\ &= (x - 26) \{ (x - 25)^2 - 2 \} \end{aligned}$$

より、26 以外の 2 解は整数ではない。

以上より、条件を満たす  $k$  の値は

$$k = 16200 \quad (\text{答})$$