

数チャレ 第117回 (2010年10月)

10進表示で2桁以下の正の整数 X_1 の十の位を a_1 、一の位を b_1 ($a_1 \neq b_1$) とし、 X_1 が1桁のときは $a_1 = 0$ とする。 X_1 の十の位と一の位を入れ替えてできる2桁以下の数と X_1 のうち、大きい方から小さい方を引いて得られる数を X_2 とし、 X_2 の十の位を a_2 、一の位を b_2 とする。以下、同様の操作により X_n から X_{n+1} を定め、数列 $\{X_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ を作る。

- (1) $a_2 + b_2$ の値を求めよ。
- (2) 初期値 X_1 によらず、ある自然数 p が存在して、 $n \geq 3$ においてつねに $X_{n+p} = X_n$ が成り立つことを示せ。

解答

(1)
$$10a_2 + b_2 = |(10a_1 + b_1) - (10b_1 + a_1)| = 9|a_1 - b_1|$$
 は9の倍数であるから、 $a_2 + b_2$ も9の倍数である。

$$0 \leq a_2 \leq 9, \quad 0 \leq b_2 \leq 9$$

より $a_2 + b_2 = 0, 9, 18$ のいずれかであるが、

$$0 < |a_1 - b_1| \leq 9$$

より $(a_2, b_2) \neq (0, 0), (9, 9)$ であるから

$$a_2 + b_2 = 9 \quad (\text{答})$$

- (2) (1)と同様の議論により、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n + b_n = 9 \quad (a_n \neq b_n)$$

が成り立つから、 $n \geq 2$ では

$$09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$$

のいずれかしか現れない。

$$\begin{aligned} 10a_{n+1} + b_{n+1} &= |(10a_n + b_n) - (10b_n + a_n)| \\ &= 9|a_n - b_n| \\ &= 9|2a_n - 9| \end{aligned}$$

a_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9 2a_n - 9 $	81	63	45	27	09	09	27	45	63	81
a_{n+1}	8	6	4	2	0	0	2	4	6	8

より、 a_3 は0, 2, 4, 6, 8のいずれかに限られ、以下 $\{a_n\}$ は

$$0 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 0$$

と繰り返されるから、 $n \geq 3$ において $a_{n+5} = a_n$ が成り立つ。

$a_n + b_n = 9$ ($n \geq 2$) より $b_{n+5} = b_n$ も成り立つから、

$$X_{n+5} = X_n \quad (n \geq 3)$$

である。

(証明おわり)

(注) 第 104 回(2009 年 9 月)において, 平方数 K^2 を 10 進表示して適当に上の桁と下の桁を分けて加えると K に等しくなる自然数 K はカプレカ数と呼ばれると紹介したが, 各位の数を並び替えてできる最大数から最小数を引いた数が元の数に一致するものもカプレカ数と呼ばれる。本問では, 2 桁の(第 2 の定義の)カプレカ数が存在しないことを, 事実上証明している。