

# 数チャレ 第118回 (2010年11月)

正の整数  $a, b, c, d, r$  は

$$a + b + c + d - abcd = r \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \leq b \leq c \leq d \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすものとする。

- (1)  $abc \leq 3$ であることを示せ。
- (2)  $r$  がとり得る値をすべて求めよ。

## 解答

(1) 正の整数  $a, b, c, d$  は②を満たすから

$$a + b + c + d \leq 4d$$

が成り立ち, ①より

$$r \leq 4d - abcd = d(4 - abc)$$

が成り立つ。

$r > 0, d > 0$  であるから,  $4 - abc$  は正の整数であり,

$$4 - abc \geq 1 \quad \therefore abc \leq 3 \quad \text{(証明おわり)}$$

(2) (1)より

$$abc \leq 3$$

であるから, ②を考えると

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3)$$

の場合に限られる。

(i)  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$  のとき, ①より

$$r = 1 + 1 + 1 + d - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d = 3$$

(ii)  $(a, b, c) = (1, 1, 2)$  のとき, ①より

$$r = 1 + 1 + 2 + d - 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot d = 4 - d$$

であり,

$$c = 2 \leq d, \quad r = 4 - d \geq 1$$

より

$$d = 2 \text{ または } 3 \quad \therefore r = 2 \text{ または } 1$$

(iii)  $(a, b, c) = (1, 1, 3)$  のとき, ①より

$$r = 1 + 1 + 3 + d - 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot d = 5 - 2d$$

であるが,

$$c = 3 \leq d, \quad r = 5 - 2d \geq 1$$

は両立しないから不適である。

以上より,  $r$  がとり得る値は

$$r = 1, 2, 3 \quad \text{(答)}$$