

# 数チャレ 第119回 (2010年12月)

正の整数  $x, y, z$  は方程式

$$3^x + 4^y = 5^z \quad \dots\dots (*)$$

を満たすものとする。

- (1)  $3 = 4 - 1, 5 = 4 + 1$  に注目して,  $x$  が偶数であることを示せ。
- (2)  $z$  が偶数であることを示せ。
- (3) (\*) を満たす正の整数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。

## 解答

(1)  $3 = 4 - 1, 5 = 4 + 1$  に注目すると,

$$3^x \equiv (4 - 1)^x \equiv (-1)^x \pmod{4}, \quad 5^z \equiv (4 + 1)^z \equiv 1 \pmod{4}$$

であるから, (\*) より

$$(-1)^x \equiv 1 \pmod{4}$$

$x$  が奇数なら  $(-1)^x \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{4}$  であるから,  $x$  は偶数である。

(証明おわり)

(2)  $4^y \equiv (3 + 1)^y \equiv 1 \pmod{3}, \quad 5^z \equiv (3 + 2)^z \equiv 2^z \pmod{3}$

であるから, (\*) より

$$2^z \equiv 1 \pmod{3}$$

$z$  が奇数なら  $(-1)^z \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{3}$  であるから,  $z$  は偶数である。

(証明おわり)

(3) (1), (2) より

$$x = 2m, \quad z = 2n \quad (m, n \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表されて, (\*) より

$$2^{2y} = 4^y = 5^{2n} - 3^{2m} = (5^n + 3^m)(5^n - 3^m)$$

$5^n + 3^m, 5^n - 3^m$  はともに偶数であることと素因数分解を考えると,

$$5^n - 3^m = 2^k, \quad 5^n + 3^m = 2^{2y-k}, \quad 1 \leq k < 2y - k$$

を満たす正の整数  $k$  が存在し,

$$\begin{cases} 5^n = 2^{2y-k-1} + 2^{k-1} & \dots\dots \textcircled{2} \\ 3^m = 2^{2y-k-1} - 2^{k-1} & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

ここで,  $(2y - k - 1) - (k - 1) = (2y - k) - k > 0$  より,  $2^{2y-k-1} + 2^{k-1}$  および  $2^{2y-k-1} - 2^{k-1}$  がともに奇数となるのは

$$2^{k-1} = 2^0 = 1$$

となるときであり,

$$k = 1$$

このとき, ③より

$$3^m = 2^{2y-2} - 1 = (2^{y-1} + 1)(2^{y-1} - 1)$$

$(2^{y-1} + 1) - (2^{y-1} - 1) = 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$  より一方は 3 で割り切れないから,  
 $2^{y-1} + 1 = 3^m, 2^{y-1} - 1 = 1 \quad \therefore y = 2, m = 1$

②より

$$5^n = 2^2 + 1 \quad \therefore n = 1$$

①より

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注) 本問の結果は 1956 年に W. Sierpiński により証明された定理であり, 同年 L. Jeśmanowicz により

$a^2 + b^2 = c^2$  を満たす正の整数の組  $(a, b, c)$  に対して,

$a^x + b^y = c^z$  の正の整数解は  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  のみ

であろうという予想が提出された。Jeśmanowicz 予想は未だ未解決である。