

数チャレ 第120回(2011年1月)

以下の問いに答えよ。

- (1) $2011a \equiv 1 \pmod{23}$, $0 < a < 23$ を満たす整数 a を求めよ。
- (2) $2011 \times 21 \equiv b^2 \pmod{23}$ を満たす正の整数 b を1つ見つけよ。
- (3) $2011x + 23 = y^2$ を満たす正の整数 x, y が存在することを示せ。

ヒント：(1), (2)は, x を7の倍数で探すことを示唆している。

解答

- (1) $2011 = 23 \times 87 + 10$, $70 = 23 \times 3 + 1$ より
 $2011 \times 7 \equiv 10 \times 7 \equiv 1 \pmod{23}$

であるから, $2011a \equiv 1 \pmod{23}$ より

$$2011(a - 7) \equiv 0 \pmod{23}$$

2011 と 23 は互いに素であるから

$$a \equiv 7 \pmod{23}$$

$0 < a < 23$ より

$$a = 7 \quad (\text{答})$$

- (2) $2011 \times 21 \equiv 10 \times (7 \times 3) \equiv 30 \times 7 \equiv 7 \times 7 \pmod{23}$

であるから,

$$b = 7 \quad (\text{答})$$

が見つかる。

(注) $(23 - 7)^2 = 23^2 - 2 \times 23 \times 7 + 7^2 \equiv 7^2 \pmod{23}$ であるから, $b = 16$ も答の一つであり, そのほかにもある。

- (3) $205^2 = 42045$, $206^2 = 42436$ であるから

$$2011 \times 21 + 23 = 42254$$

は平方数ではないが,

$$x = 7 \times (3 + 23) = 182$$

について調べてみると

$$2011 \times 182 + 23 = 366025 = 605^2$$

となるから, $2011x + 23 = y^2$ を満たす正の整数 x, y が存在する。(証明おわり)

(注)

1° 366025 の開平を直接行なうのは大変なので,

$$360000 = 600^2$$

あたりをつけて計算するのが現実的である。

2° ベーシックなどでプログラミングして計算すると, $0 < y < 2011$ では

$$(x, y) = (182, 605), (983, 1406)$$

が求まる。

3° 素数 p を法として, p で割り切れない整数 a が平方数に合同であるとき $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$,
そうでないとき $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ で表すことにすると, 相異なる奇素数 p, q に対して

$$\text{平方剰余の相互法則} : \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

が成り立つ。

この知識を用いると,

$$\left(\frac{2011}{23}\right) = \left(\frac{10}{23}\right) = -1$$

より

$$\left(\frac{23}{2011}\right) = 1$$

であることがわかる。