

数チャレ 第121回 (2011年2月)

自然数 x, y を用いて $p^2 = x^3 + y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ。また、このときの x, y をすべて求めよ。

出典：2001年 千葉大学

解答

$$p^2 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

x, y は自然数であるから

$$x+y \geq 2, \quad x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$$

であり、 p は素数であるから

$$(i) \quad x+y = p^2, \quad x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$(ii) \quad x+y = x^2 - xy + y^2 = p$$

のいずれかである。

(i) の場合：

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \text{ より}$$

$$4 = 4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2 + 3y^2$$

$$3 \cdot 1^2 \leq 3y^2 \leq 4 \text{ より}$$

$$y = 1, \quad (2x - 1)^2 = 1 \quad \therefore x = y = 1$$

このとき、 $x+y = p^2 \geq 2^2$ と矛盾する。

(ii) の場合：

2式から y を消去して

$$x^2 - x(p-x) + (p-x)^2 = p$$

$$3x^2 - 3px + p^2 = p$$

$$\therefore 3x^2 = p(3x - p + 1)$$

p は素数であるから

$$p \mid 3 \text{ または } p \mid x$$

であるが、 $x+y = p$ より $0 < x < p$ 、および 3 が素数であることより

$$p = 3$$

である。このとき、 $x+y = 3$ より

$$(x, y) = (1, 2), (2, 1)$$

が必要であるが、どちらも $x^2 - xy + y^2 = 3$ を満たすので十分である。

以上より、

$$p = 3, \quad (x, y) = (1, 2), (2, 1) \quad (\text{答})$$