

数チャレ 第122回 (2011年3月)

次の命題①、②が成り立つことを解答欄に証明せよ。

$2n, 2n+1$ (n は整数) と表される整数を、順に偶数、奇数という。

集合 A を $A = \{a^2 - b^2 \mid a, b \text{ は整数}\}$ と定める。

命題①「すべての奇数は A の要素である」

m を偶数とする。

命題②「 m が4の倍数であることは、 m が A の要素であるための必要十分条件である」

出典：2011年 東京慈恵会医科大学

解答

① 任意の奇数は

$$2n+1 \quad (n \text{ は整数})$$

と表されるから、

$$2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \in A$$

である。

(おわり)

② m が4の倍数であるならば、

$$m = 4n \quad (n \text{ は整数})$$

と表され、

$$m = 4n = (n+1)^2 - (n-1)^2 \in A$$

偶数 m が A の要素であるとするれば、

$$m = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

を満たす整数 a, b が存在し、 $m = a^2 - b^2$ が偶数であることより

$$a^2 \text{ と } b^2 \text{ は偶奇が一致}$$

する。隣り合う整数の一方は偶数であるから

$$a-b = a(1-a) - b(1-b) + a^2 - b^2 \text{ は偶数}$$

であり、

$$a+b = (a-b) + 2b \text{ も偶数}$$

である。したがって、

$$m = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ は4の倍数}$$

である。

以上より、 m が4の倍数であることは、 m が A の要素であるための必要十分条件である。

(おわり)