

## 数チャレ 第123回 (2011年4月)

実数  $a, b, c$  に対して, 3次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $f(-1), f(0), f(1)$  が整数であるならば, すべての整数  $n$  に対して,  $f(n)$  は整数であることを示せ。
- (2)  $f(2010), f(2011), f(2012)$  が整数であるならば, すべての整数  $n$  に対して,  $f(n)$  は整数であることを示せ。

出典: 2011年 新潟大学

### 解答

- (1)  $f(0) = c, f(-1) = -1 + a - b + c, f(1) = 1 + a + b + c$  はそれぞれ整数であるから,

$c, a + b, a - b$  はそれぞれ整数

である。連続する整数の一方は偶数であるから, すべての整数  $n$  に対して

$$\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \text{ は整数}$$

であり, 整数は積および和について閉じているから

$$f(n) = n^3 + (a+b)\frac{n(n+1)}{2} + (a-b)\frac{n(n-1)}{2} + c$$

は整数である。

(おわり)

- (2)  $g(x) = f(x + 2011)$   
 $= (x + 2011)^3 + a(x + 2011)^2 + b(x + 2011) + c$   
 $= x^3 + px^2 + qx + r$

とおくと,  $p, q, r$  は実数である。

$$g(-1) = f(2010), g(0) = f(2011), g(1) = f(2012)$$

が整数であるならば,  $g(x)$  は(1)の仮定を満たすから, すべての整数  $n$  に対して  $g(n)$  は整数となる。  $n$  がすべての整数を動くとき,

$$n - 2011 \text{ はすべての整数をとり得る}$$

から, すべての整数  $n$  に対して

$$f(n) = g(n - 2011) \text{ は整数}$$

である。

(おわり)

- (注) 「 $a, b, c$  が整数」と仮定されているわけではないので, (1)より直ちに(2)が成り立つというわけにはいかない。