

数チャレ 第124回 (2011年5月)

p, q を整数とする。2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) を持ち、区間 $[\alpha, \beta]$ には、ちょうど2つの整数が含まれているとする。 α が整数でないとき、 $\beta - \alpha$ の値を求めなさい。

出典：2011年 山口大学

解答

解の公式と $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(p^2 - 4q > 0)$$

ここで、 $-\frac{p}{2}$ が整数であるとすれば、区間 $[\alpha, \beta]$ に $-\frac{p}{2}$ 以外の整数が含まれるから、 $\alpha \leq -\frac{p}{2} - 1 < -\frac{p}{2} < -\frac{p}{2} + 1 \leq \beta$ となって、ちょうど2つであることに反する。よって、 $-\frac{p}{2}$ は整数でなく、

p は奇数

であり、

$$[\alpha, \beta] \text{ に含まれる整数は } -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$y = x^2 + px + q$ の $x = -\frac{p}{2}$ に関する対称性と α が整数でないことより、条件は

$$-\frac{p}{2} - \frac{3}{2} < \alpha \leq -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$$

②より

$$-\frac{3}{2} < -\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$1 \leq \sqrt{p^2 - 4q} < 3$$

$$\therefore 1 \leq p^2 - 4q < 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ところで、 p は奇数であるから

$$p^2 \equiv 1 \pmod{4} \quad \therefore p^2 - 4q \equiv 1 \pmod{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であり、②と③を同時に満たすのは

$$p^2 - 4q = 1 \text{ または } 5$$

に限られる。このとき、①より

$$\beta - \alpha = \sqrt{p^2 - 4q} = 1, \sqrt{5} \quad (\text{答})$$