

数チャレ 第125回 (2011年6月)

方程式 $x^2 - xy - 2y^2 + x - 5y + 7 = 0$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

解答

$$\begin{aligned}x^2 - xy - 2y^2 &= (x+y)(x-2y) \text{ を考えて,} \\x^2 - xy - 2y^2 + x - 5y + 7 \\&= (x+y+a)(x-2y+b) + c \\&= x^2 - xy - 2y^2 + (a+b)x + (b-2a)y + ab + c \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{cases} a+b=1 & \dots\dots ② \\ -2a+b=-5 & \dots\dots ③ \\ ab+c=7 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

②かつ③より

$$a=2, \quad b=-1$$

④より

$$c=9$$

①に代入すると

$$(x+y+2)(x-2y-1) = -9 \quad \dots\dots ⑤$$

$p = x + y + 2, \quad q = x - 2y - 1$ とおくと

$$\begin{aligned}2p+q &= 3x+3, \quad p-q = 3y+3 \\ \therefore x &= \frac{2p+q-3}{3}, \quad y = \frac{p-q-3}{3} \quad \dots\dots ⑥\end{aligned}$$

⑤より $pq = -9$ であるから

$$(p, q) = (1, -9), (3, -3), (9, -1), (-9, 1), (-3, 3), (-1, 9)$$

このうち, $2p+q$ と $p-q$ がともに 3 で割り切れるのは

$$(p, q) = (3, -3), (-3, 3)$$

だけであり, ⑥より

$$(x, y) = (0, 1), (-2, -3) \quad (\text{答})$$