

## 数チャレ 第126回 (2011年7月)

- (1) 数列の極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n}$  を求めよ。
- (2) 自然数  $n$  に対して,  $n!$  が素数  $p$  でちょうど  $m$  回割り切れるとき,  $m \leq \frac{n}{p-1}$  であることを示せ。
- (3) (1)と(2)を利用して, 素数が無数にあることを示せ。

### 解答

- (1)  $y = \log x$  は単調増加関数であるから, 2以上の自然数  $k$  に対して

$$\log k > \int_{k-1}^k \log x \, dx$$

$k = 2, 3, \dots, n$  について辺々加えると

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \sum_{k=2}^n \log k > \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x \, dx = \int_1^n \log x \, dx \\ &= \left[ x(\log x - 1) \right]_1^n \\ &= n(\log n - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\log(n!)}{n} > \log n - 1 + \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - 1 + \frac{1}{n} \right) = \infty$  であるから, 追い出しの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n} = \infty \quad (\text{答})$$

(別解) 自然数  $n$  に対して,

$$2m \leq n < 2(m+1) \quad \dots\dots (*)$$

を満たす非負整数  $m$  が存在するから

$$\frac{\log(n!)}{n} > \frac{\log\{(2m)!\}}{2(m+1)} \geq \frac{\log(m^m \cdot m!)}{2(m+1)} \geq \frac{\log m^m}{2(m+1)} = \frac{\log m}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

(\*)より  $n \rightarrow \infty \iff m \rightarrow \infty$  であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log m}{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \infty$$

であるから, 追い出しの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n} = \infty \quad (\text{答})$$

(2)  $N$  を十分大きい自然数として,

$$\begin{aligned}
 m &= \sum_{k=1}^{N-1} k \left( \left[ \frac{n}{p^k} \right] - \left[ \frac{n}{p^{k+1}} \right] \right) + N \left[ \frac{n}{p^N} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} k \left[ \frac{n}{p^k} \right] - \sum_{k=2}^N (k-1) \left[ \frac{n}{p^k} \right] + N \left[ \frac{n}{p^N} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[ \frac{n}{p^k} \right] \\
 &\leq \sum_{k=1}^N \frac{n}{p^k} = n \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{p} \right)^k \leq n \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{p} \right)^k = n \cdot \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}
 \end{aligned}$$

(証明おわり)

(3) 各素数  $p$  に対して(2)で定めた  $m$  の値を  $e(p)$  で表すことにすると, (2)で示したことを用いて

$$\begin{aligned}
 \log(n!) &= \log \left( \prod_p p^{e(p)} \right) = \sum_p e(p) \log p \leq \sum_p \frac{n}{p-1} \log p \\
 \therefore \sum_p \frac{\log p}{p-1} &\geq \frac{\log(n!)}{n}
 \end{aligned}$$

(1)の結果と追い出しの原理により, 素数  $p$  は無数にある。 (証明おわり)