

数チャレ 第127回 (2011年8月)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の各成分は整数であり, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $A^3 = E$ となる行列 A は無数にあることを示せ。
 (2) $A^5 = E$ となる行列 A をすべて求めよ。

解答

- (1) $A^3 = E$ となるとき

$$(\det A)^3 = \det(A^3) = \det E = 1$$

であり, $\det A = ad - bc$ は整数であるから,

$$\det A = ad - bc = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t = a + d$ とおくと, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - tA + E = O \quad \therefore A^2 = tA - E$$

$$\therefore A^3 = tA^2 - A = t(tA - E) - A = (t^2 - 1)A - tE$$

$A^3 = E$ より

$$(t^2 - 1)A = (t + 1)E$$

ここで,

$$t = a + d = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

のときを考え,

$$c = 1$$

とすると, ①, ②より

$$d = -a - 1, \quad b = ad - 1 = a(-a - 1) - 1 = -a^2 - a - 1$$

よって, 整数 a に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -a^2 - a - 1 \\ 1 & -a - 1 \end{pmatrix}$$

の各成分は整数であり, $A^3 = E$ を満たす。整数 a の値が異なれば, 行列 A も異なるから, $A^3 = E$ となる行列 A は無数にある。 (証明おわり)

- (2) $A^5 = E$ となるとき

$$(\det A)^5 = \det(A^5) = \det E = 1$$

であり, $\det A = ad - bc$ は整数であるから,

$$\det A = ad - bc = 1$$

$t = a + d$ とおくと, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - tA + E = O$$

$$\begin{aligned} A^5 &= (A^2 - tA + E)\{A^3 + tA^2 + (t^2 - 1)A + (t^3 - 2t)E\} \\ &\quad + (t^4 - 3t^2 + 1)A - (t^3 - 2t)E \\ &= (t^4 - 3t^2 + 1)A - (t^3 - 2t)E \end{aligned}$$

$A^5 = E$ より

$$(t^4 - 3t^2 + 1)A = (t^3 - 2t)E \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

ここで, $t^4 - 3t^2 + 1 = 0$ とすると,

$$t^2(3 - t^2) = 1$$

であり, t は整数 (t^2 は非負整数) であるから

$$t^2 = 3 - t^2 = 1$$

となって矛盾するから,

$$t^4 - 3t^2 + 1 \neq 0$$

よって, $\textcircled{3}$ より (A はスカラー行列となって)

$$A = aE$$

であるから, $A^5 = E$ より

$$a^5 = 1$$

a は整数であるから

$$a = 1$$

に限られ, 求める行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

ですべてである。