

数チャレ 第128回 (2011年9月)

漸化式

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ について考える。

- (1) a_n が偶数となるための (n についての) 必要十分条件を求めよ。
- (2) a_n が 10 の倍数となるための (n についての) 必要十分条件を求めよ。

解答

- (1) 与えられた漸化式より

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = (a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n$$

帰納法により, 任意の自然数 n に対して a_n は整数であることが示されるから,

$$a_{n+3} \equiv a_n \pmod{2}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2 \text{ より}$$

$$\text{「} a_n \text{ が偶数」} \iff \text{「} n \text{ が 3 の倍数」} \quad (\text{答})$$

- (2) $a_{n+4} = 2a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 3a_{n+1} + 2a_n$

$$a_{n+5} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) + 2a_{n+1} = 5a_{n+1} + 3a_n$$

であり, 3 と 5 は互いに素であるから

$$5 \mid a_{n+5} \iff 5 \mid a_n, \quad 5 \nmid a_{n+5} \iff 5 \nmid a_n$$

である。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5$$

であるから,

$$5 \mid a_n \iff 5 \mid n$$

2 と 5 は互いに素であるから, (1) の結果とあわせて

$$10 \mid a_n \iff 3 \mid n \text{ かつ } 5 \mid n$$

$$\iff \text{「} n \text{ が 15 の倍数」} \quad (\text{答})$$

(注) $\{a_n\}$ を 5 で割った余り自体は, n について 5 を周期とするわけではない。実際,

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a_{n+5} \equiv 3a_n \pmod{5} \text{ より}$$

$$a_6 \equiv 3, a_7 \equiv 3, a_8 \equiv 6 \equiv 1, a_9 \equiv 9 \equiv 4, a_{10} \equiv 0 \pmod{5}$$

$$a_{n+10} \equiv 3a_{n+5} \equiv 3(3a_n) \equiv -a_n \pmod{5} \text{ より}$$

$$a_{11} \equiv -1 \equiv 4, a_{12} \equiv -1 \equiv 4, a_{13} \equiv -2 \equiv 3, a_{14} \equiv -3 \equiv 2,$$

$$a_{15} \equiv 0, a_{16} \equiv -3 \equiv 2, a_{17} \equiv -3 \equiv 2, a_{18} \equiv -1 \equiv 4,$$

$$a_{19} \equiv -4 \equiv 1, a_{20} \equiv 0, a_{21} \equiv 1, a_{22} \equiv 1 \pmod{5}$$

となるから, $\{a_n\}$ を 5 で割った余りは, n について 20 を周期とする。