

数チャレ 第129回 (2011年10月)

- (1) n を整数とするとき, $n(n+1)(n-1)(n+7)(n-7)$ を5で割った余りを求めよ。
(2) 6つの整数 $n-7, n-5, n-1, n+1, n+5, n+7$ がいずれも素数となるような整数 n をすべて求めよ。

解答

- (1) $n+7 \equiv n+2 \pmod{5}$, $n-7 \equiv n-2 \pmod{5}$ であり, 5つの整数 $n, n\pm 1, n\pm 2$ を5で割った余りは相異なるから,

$$n, n+1, n-1, n+7, n-7 \text{ のうち1つは5で割り切れる。}$$

したがって, 整数 n の値によらず,

$$n(n+1)(n-1)(n+7)(n-7) \text{ を5で割った余りは0 (答)}$$

- (2) $n-7 \geq 2$ が必要であるから

$$n \geq 9$$

$n \pm 5 \equiv n \pmod{5}$ であるから, (1)より,

$$n+5, n-5, n+1, n-1, n+7, n-7 \text{ のうち1つは5で割り切れる。}$$

5で割り切れる素数は5だけであり,

$$n+7 > n+5 > n+1 > n-1 \geq 8$$

であるから,

$$n-5=5 \text{ または } n-7=5$$

であるが, $n-5=5$ とすると $n-1=9$ は素数でないから,

$$n-7=5 \text{ すなわち } n=12$$

に限られる。

このとき,

$$n-7=5, n-5=7, n-1=11,$$

$$n+1=13, n+5=17, n+7=19$$

はすべて素数であり, 十分である。

以上より, 条件を満たす整数 n は

$$n=12 \text{ (答)}$$

ですべてである。