

数チャレ 第130回 (2011年11月)

$S = \{15a + 21b + 35c \mid a, b, c \text{ は整数}\}$ とする。

- (1) S は和および整数倍について閉じていることを示せ。ただし, S が和について閉じているとは, $x, y \in S \implies x + y \in S$ が成り立つことであり, S が整数倍について閉じているとは, 整数 n および S の要素 s に対して $ns \in S$ が成り立つことである。
- (2) 集合 S に属する最小の自然数を求めよ。

解答

- (1) $x, y \in S$ とすると

$$x = 15a_1 + 21b_1 + 35c_1, \quad y = 15a_2 + 21b_2 + 35c_2 \\ (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z})$$

と表され,

$$x + y = 15(a_1 + a_2) + 21(b_1 + b_2) + 35(c_1 + c_2) \in S$$

となるから, S は和について閉じている。

$$n \in \mathbb{Z}, \quad s = 15a + 21b + 35c \in S \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}) \text{ に対して}$$

$$ns = 15na + 21nb + 35nc \in S$$

となるから, S は整数倍について閉じている。

(証明おわり)

- (2) S に属する最小の自然数を m とする。

任意の $s \in S$ に対して

$$s = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

を満たす整数 q, r が存在する。 $s, m \in S$ であるから, (1)より

$$-mq \in S, \quad r = s - mq \in S$$

m の最小性より

$$r = 0 \quad \therefore s = mq$$

したがって,

$$S = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

15, 21, 35 はそれぞれ S の要素であるから,

$$m \text{ は } 15, 21, 35 \text{ の公約数}$$

である。

$$15 = 3 \times 5, \quad 21 = 3 \times 7, \quad 35 = 5 \times 7 \text{ は互いに素}$$

であるから, m は 1 の (正の) 約数であり,

$$m = 1 \quad (\text{答})$$

に決まる。