

数チャレ 第131回 (2011年12月)

整数 a, b に対して,

$$x \text{ の方程式 } x^2 - ax + b = 0 \text{ および } y \text{ の方程式} \\ y^2 - by + a = 0 \text{ が整数解をもつ}$$

という条件を考える。

- (1) 整数 m, n が $m^2 - am + b = 0$ と $n^2 - bn + a = 0$ を同時に満たすとき, a を m, n だけの式で表せ。
- (2) 条件を満たす整数の組 (a, b) は無数に存在することを示せ。

解答

(1) $b = -m^2 + am$ ①

を $n^2 - bn + a = 0$ に代入して b を消去すると,

$$n^2 + (m^2 - am)n + a = 0 \\ a(mn - 1) = m^2n + n^2$$

$$\therefore a = \frac{m^2n + n^2}{mn - 1} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \text{②}$$

- (2) ②において $m = -1$ とすると

$$a = \frac{n^2 + n}{-n - 1} = \frac{n(n + 1)}{-(n + 1)} = -n$$

このとき, ①より

$$b = -(-1)^2 - n(-1) = n - 1$$

任意の整数 n に対して,

$$a = -n, \quad b = n - 1 \text{ は整数}$$

であり,

$$x^2 - ax + b = x^2 + nx + (n - 1) = (x + 1)(x + n - 1) \\ y^2 - by + a = y^2 - (n - 1)y - n = (y + 1)(y - n)$$

であるから, 条件を満たす。

よって, 条件を満たす整数の組 $(a, b) = (-n, n - 1)$ は無数にある。

(証明おわり)