

数チャレ 第132回 (2012年1月)

方程式

$$2012x + 24y = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の整数解を考える。

- (1) ①を満たす整数 x, y が存在するような正の整数 a の最小値を求めよ。
(2) a が (1) の最小値であるとき, ①の整数解 (x, y) を求めよ。

解答

- (1) $2012x$ も $24y$ も 4 で割り切れるから, ①を満たすなら

$$a \geq 4$$

であることが必要である。

一方,

$$2012 = 24 \times 83 + 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$24 = 20 \times 1 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

であるから, ③ - ② より

$$24 - 2012 = 4 - 24 \times 83$$

$$\therefore 2012 \times (-1) + 24 \times 84 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$a = 4$ のとき ①は整数解 $(-1, 84)$ をもち十分であるから,
 a の最小値は 4 (答)

- (2) $a = 4$ のとき, ① - ④ より

$$2012(x + 1) + 24(y - 84) = 0$$

$$2012(x + 1) = 24(84 - y)$$

$$\therefore 503(x + 1) = 6(84 - y)$$

503 と 6 は互いに素であるから

$$x + 1 = 6n, \quad 84 - y = 503n$$

を満たす整数 n が存在し,

$$(x, y) = (6n - 1, -503n + 84) \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{(答)}$$