

## 数チャレ 第133回 (2012年2月)

(1) 10 から 15 までの自然数を, 連続した 2 個以上の自然数の和としてそれぞれ表せ.

(2) 自然数  $n$  が 2 の累乗でなければ, つまり  $n = 2^m(2\ell + 1)$ ,  $m \geq 0$ ,  $\ell \geq 1$  と表されるならば,  $n$  は連続した 2 個以上の自然数の和として表されることを証明せよ.

(3) 自然数  $n$  が 2 の累乗ならば, つまり  $n = 2^m$ ,  $m \geq 1$  ならば,  $n$  は連続した 2 個以上の自然数の和として表せないことを証明せよ.

出典: 2002 年 上智大学 理工学部

### 解答

(1) 10 から 15 までの自然数を, 連続した 2 個以上の自然数の和で表すと,

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$11 = 5 + 6$$

$$12 = 3 + 4 + 5$$

$$13 = 6 + 7$$

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$15 = 4 + 5 + 6$$

(答)

(2)  $n = 2^m(2\ell + 1)$  ( $m$  は非負整数,  $\ell$  は自然数) とするとき

$$\begin{aligned} 2\ell + 1 &= \ell + (\ell + 1) \\ &= (\ell - 1) + (\ell + 2) \\ &= (\ell - 2) + (\ell + 3) \\ &\vdots \\ &= (\ell - k) + (\ell + k + 1) \end{aligned}$$

に注目すると,

$$n = \sum_{k=0}^{2^m-1} \{(\ell - k) + (\ell + k + 1)\} = \sum_{k=\ell-2^m+1}^{\ell+2^m} k$$

ここで,  $\ell - 2^m + 1 > 0$  ならば連続した 2 個以上の自然数の和を表すが,  $\ell - 2^m + 1 \leq 0$  のときは  $\pm(\ell - 2^m + 1), \dots, \pm 2, \pm 1$  がそれぞれ相殺されて

$$n = \sum_{k=2^m-\ell}^{\ell+2^m} k$$

は連続した 2 個以上の自然数の和を表す。

(証明おわり)

(3)  $n = 2^m$  が自然数  $a$  から自然数  $a + b$  ( $b \geq 1$ ) までの和であるとすれば,

$$2^m = \frac{b+1}{2}(a+a+b)$$

$$\therefore (b+1)(2a+b) = 2^{m+1}$$

$b+1$  と  $2a+b$  はともに 2 以上の整数であり,

$$(2a+b) - (b+1) = 2a-1 \text{ (奇数)}$$

であるから,  $b+1$  と  $2a+b$  の一方は 3 以上の奇数となって矛盾する。

よって,  $n = 2^m$  は連続した 2 個以上の自然数の和として表せない。

(証明おわり)