

数チャレ 第134回 (2012年3月)

整数 x, y が $x^2 - 23y^2 = 1$ を満たすとき、
次の問いに答えよ。

(i) $1 < x + \sqrt{23}y < 49$ のとき、 $x = \boxed{\text{ケ}}$ 、
 $y = \boxed{\text{コ}}$ である。

(ii) 1 より小なる $x + \sqrt{23}y$ が最大となる
のは $x = \boxed{\text{サ}}$ 、 $y = \boxed{\text{シ}}$ のときである。

出典：2012年 早稲田大学 国際教養学部

解答

$$x^2 - 23y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $1 < x + \sqrt{23}y < 49$ \dots\dots \textcircled{2}

のとき、 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して

$$1 < \frac{1}{x - \sqrt{23}y} < 49$$

$$\frac{1}{49} < x - \sqrt{23}y < 1$$

$$\therefore -1 < -x + \sqrt{23}y < -\frac{1}{49} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ より

$$0 < 2\sqrt{23}y < 49 - \frac{1}{49} < \frac{2400}{49}$$

$$\therefore 0 < \sqrt{23}y < \frac{1200}{49} < \frac{1200}{48} = 25$$

$$5\sqrt{23} = \sqrt{575} < 25 < 6\sqrt{23} = \sqrt{828} \text{ より}$$

$$y = 1, 2, 3, 4, 5$$

に限られ、 $23y^2 + 1$ を計算すると

$$23 \times 1^2 + 1 = 24$$

$$23 \times 2^2 + 1 = 93$$

$$23 \times 3^2 + 1 = 208$$

$$23 \times 4^2 + 1 = 369$$

$$23 \times 5^2 + 1 = (24 - 1) \times (24 + 1) + 1 = 24^2$$

であり、平方数になるときを考え、

$$x = \boxed{\text{ケ}} \quad y = \boxed{\text{コ}}$$

(ii) (i)より

$24 + \sqrt{23} \times 5$ は $x + \sqrt{23}y > 1$ における最小値
である。逆数をとると

$24 + \sqrt{23} \times (-5)$ は $(0 <) x + \sqrt{23}y < 1$ における最大値
であるから、求める値は

$$x = \boxed{24}, \quad y = \boxed{-5}$$

(サ) (シ)