

数チャレ 第136回 (2012年5月)

正の奇数 p に対して, 3つの自然数の組 (x, y, z) で, $x^2 + 4yz = p$ を満たすものの全体の集合を S とおく. すなわち,

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ は自然数}, x^2 + 4yz = p\}.$$

次の問いに答えよ.

問1 S が空集合でないための必要十分条件は, $p = 4k + 1$ (k は自然数) と書けることであることを示せ.

問2 S の要素の個数が奇数ならば S の要素 (x, y, z) で $y = z$ となるものが存在することを示せ.

出典: 2012年 旭川医科大学

解答

問1 $S \neq \emptyset$ のとき, $(x, y, z) \in S$ とすると

$$p = x^2 + 4yz$$

p は奇数であるから x も奇数であり,

$$x = 2n - 1 \quad (n \text{ は自然数})$$

とおくことができ,

$$p = 4(n^2 - n + yz) + 1$$

と表される. n, y, z は自然数であるから

$$n^2 - n = n(n - 1) \geq 0, \quad yz > 0$$

であり, $n^2 - n + yz$ も自然数である.

$p = 4k + 1$ (k は自然数) と書けるととき, t の関数 $f(t) = 4t(t - 1) + 1$ は $t \geq 1$ において狭義単調増加であるから,

$$4n(n - 1) + 1 < p \leq 4n(n + 1) + 1$$

となる自然数 n がある. このとき

$$p - (2n - 1)^2 = p - 4n(n - 1) - 1 = 4(k - n^2 + n)$$

は正の整数であるから,

$$k - n^2 + n = yz$$

を満たす自然数 y, z が存在し, $(2n - 1, y, z) \in S$ である. (証明おわり)

(注) $4n(n - 1) < p \leq 4n(n + 1)$ となる自然数 n があるというだけでは, $k - n^2 + n = 0$ となる可能性を排除できない. $n = 1$ では $4n(n - 1) = 0$ になることと $4k + 1$ の形を考えて, $4n(n - 1) + 1 < p \leq 4n(n + 1) + 1$ に絞れた効果が大きい.

問 2 問 1 より

$$S = \{(2n - 1, y, z) \mid n, y, z \text{ は自然数}, p = 4(n^2 - n + yz) + 1\}$$

問 1 の証明のプロセスより, n は

$$4n(n - 1) + 1 < p \leq 4n(n + 1) + 1$$

により一意に定まるから, S の要素の個数は $yz = \frac{p - 1}{4} - n(n - 1)$ を満たす自然数の組 (y, z) の個数, すなわち

$$\frac{p - 1}{4} - n(n - 1) \text{ の正の約数の個数}$$

である。それが奇数ならば,

$$\frac{p - 1}{4} - n(n - 1) \text{ は平方数}$$

であり, $y = z$ となるものが存在する。

(証明おわり)