

数チャレ 第137回 (2012年6月)

$x^2 + xy - y = 3$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答

$x^2 + xy - y = 3$ を変形して

$$x(x + y) - y = 3$$

$$x(x + y) - (x + y) + x = 3$$

$$(x - 1)(x + y) + x - 1 = 3 - 1$$

$$\therefore (x - 1)(x + y + 1) = 2$$

整数の積の組合せを考えて

$$(x - 1, x + y + 1) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$$

$$\therefore (x, y) = (2, -1), (3, -3), (0, -3), (-1, -1) \quad (\text{答})$$

(注)

1° 2次の部分(主要部)は

$$x^2 + xy = x(x + y)$$

であるから, 積の形を作るのが基本解法であり,

$$x^2 + xy - y - 3 = (x + a)(x + y + b) + c$$

とにおいて係数比較してもよい。

2° $x^2 + xy - y = 3$ を次のように変形して解くこともできる。

$$(x - 1)y = 3 - x^2$$

$$\therefore y = \frac{3 - x^2}{x - 1} = \frac{-(x - 1)(x + 1) + 2}{x - 1} = -(x + 1) + \frac{2}{x - 1}$$

ここで, x も y も整数であるから $\frac{2}{x - 1}$ も整数であり,

$$x - 1 = \pm 1, \pm 2$$

$$\therefore x = 2, 3, 0, -1$$

$y = \frac{3 - x^2}{x - 1}$ に代入して

$$(x, y) = (2, -1), (3, -3), (0, -3), (-1, -1) \quad (\text{答})$$