

数チャレ 第138回 (2012年7月)

a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす整数であり, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。

(1) $A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ を計算せよ。

(2) $a = bq + r$ (q, r は整数, $0 \leq r < |b|$) とするとき, $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q$ を計算せよ。

ただし, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし, $q < 0$ のときは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{|q|}$ であるとする。

(3) A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成されることを示せ。ここで, 行列 A が行列 M, N で生成されるとは, A が M, M^{-1}, N, N^{-1} のいくつかの積で表されることであり, 単位行列は任意の行列で生成されるものとする。

解答

(1)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$ (k は自然数) であるとすれば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k+1) & 1 \end{pmatrix}$$

となるから, 数学的帰納法により, 自然数 q に対して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$$

同様にして

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{|q|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |q| & 1 \end{pmatrix}$$

が示されるから, $q < 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{|q|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |q| & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$$

$q = 0$ のときも $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$ となって成り立つ。

よって, $a = bq + r$ (q, r は整数, $0 \leq r < |b|$) とするとき,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - bq & b \\ c - dq & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & b \\ c - dq & d \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $n = \min \{ |a|, |b|, |c|, |d| \}$ についての数学的帰納法で示す。

1° $n = 0$ のとき

(1)により, $n = |b| = 0$ のとき示せば十分である。 $\det A = ad = 1$ より

$$a = d = \pm 1$$

$a = d = 1$ のときは, (2)の計算より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-c}$$

$a = d = -1$ のときは,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

2° $n \leq k$ のとき命題が正しいとする。

(1)より, $\min \{ |a|, |b|, |c|, |d| \} = |b| = k + 1$ のときを考えれば十分である。

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

とすると, (2)より

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} r & b \\ c - dq & d \end{pmatrix}$$

$\min \{ |r|, |b|, |c - dq|, |d| \} \leq |r| = r < |b|$ であるから, 帰納法の仮定より

$$\begin{pmatrix} r & b \\ c - dq & d \end{pmatrix} \text{ は } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ および } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ で生成される。}$$

したがって,

$$A = \begin{pmatrix} r & b \\ c - dq & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-q}$$

は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成され, $n = k + 1$ のときも成り立つ。

1°, 2° より, 整数成分で行列式 1 の行列 A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される。 (証明おわり)