

数チャレ 第139回 (2012年8月)

n を 3 以上の自然数とする。

(1) $n!$ が素数 p でちょうど m 回割り切れるとき

$$m \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

であることを示せ。

(2) $\sum_{k=2}^n \frac{\log k}{k(k-1)} < \frac{5}{2}$ であることを示せ。

(3) n 以下の素数 p について $\frac{\log p}{p}$ の総和を $\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p}$ で表すとき、

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} > \log n - \frac{7}{2}$$

であることを示せ。

解答

(1) $p^N \leq n < p^{N+1}$ を満たす自然数 N を用いて、

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^{N-1} k \left(\left[\frac{n}{p^k} \right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}} \right] \right) + N \left[\frac{n}{p^N} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} k \left[\frac{n}{p^k} \right] - \sum_{k=2}^N (k-1) \left[\frac{n}{p^k} \right] + N \left[\frac{n}{p^N} \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{n}{p^k} \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{n}{p^k} = n \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{p} \right)^k \leq n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^k = \frac{n}{p} + n \cdot \frac{\frac{1}{p^2}}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \end{aligned}$$

(証明おわり)

(2) $f(x) = \frac{\log x}{x(x-1)} = \frac{\log x}{x^2-x}$ ($x \geq 2$) とおくと、

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2-x) - (\log x)(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{x-1 - (2x-1)\log x}{(x^2-x)^2}$$

ここで、さらに $g(x) = x-1 - (2x-1)\log x$ ($x \geq 2$) とおくと、

$$g'(x) = 1 - 2\log x - (2x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} - 2\log x < 0$$

$x \geq 2$ において $g(x)$ は単調減少であり, $0 < e < 3$ であるから

$$g(x) \leq g(2) = 1 - 3\log 2 = \log \frac{e}{8} < 0 \quad \therefore f'(x) < 0$$

よって, $f(x)$ は狭義単調減少であるから, $k \geq 3$ ($k-1 \geq 2$) のとき

$$\begin{aligned} \frac{\log k}{k(k-1)} &< \int_{k-1}^k \frac{\log x}{x(x-1)} dx < \int_{k-1}^k \frac{\log x}{(x-1)^2} dx \\ \therefore \sum_{k=2}^n \frac{\log k}{k(k-1)} &< \frac{1}{2} \log 2 + \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{(x-1)^2} \log x dx \\ &= \frac{1}{2} \log 2 + \int_2^n \frac{1}{(x-1)^2} \log x dx \\ &= \frac{1}{2} \log 2 + \left[-\frac{1}{x-1} \log x \right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\log n}{n-1} + \log 2 + \int_2^n \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{\log n}{n-1} + \left[\log(x-1) - \log x \right]_2^n \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{\log n}{n-1} + \log \frac{n-1}{n} + \log 2 \\ &= \frac{5}{2} \log 2 - \frac{\log n}{n-1} + \log \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &< \frac{5}{2} \log 2 \\ &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(証明おわり)

(3) 各素数 p に対して, (1) で定めた m の値を $m(p)$ で表すことにすると,

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{m(p)} < \prod_{p \leq n} p^{\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}}$$

両辺自然対数をとると

$$\log(n!) < \sum_{p \leq n} \left\{ \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \right\} \log p = n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p(p-1)}$$

(2) の結果とあわせると

$$\log(n!) < n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + \frac{5}{2}n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

一方, $y = \log x$ は増加関数であるから

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{k=2}^n \log k \\
&> \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x \, dx = \int_1^n \log x \, dx \\
&= n(\log n - 1) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

①, ②より

$$n(\log n - 1) < \log(n!) < n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + \frac{5}{2}n$$

$$\log n - 1 < \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} > \log n - \frac{7}{2}$$

(証明おわり)