

## 数チャレ 第140回 (2012年9月)

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n \text{ は自然数}) \text{ とおく。}$$

- (1)  $a_n$  は正の整数であることを示せ。  
(2)  $a_{2n}$  は平方数ではないことを示せ。

解答

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ とおくと}$$
$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

- (1)  $a_n = \alpha^n + \beta^n$  が正の整数であることを  $n$  についての数学的帰納法で示す。

1°  $n = 1, 2$  のとき

$$a_1 = \alpha + \beta = 1$$

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2(-1) = 3$$

はともに正の整数である。

2°  $a_k, a_{k+1}$  が正の整数であるとすれば,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \alpha^{k+2} + \beta^{k+2} \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) \\ &= (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) + (\alpha^k + \beta^k) \\ &= a_{k+1} + a_k \end{aligned}$$

も正の整数である。

1°, 2° より, すべての自然数  $n$  に対して  $a_n$  は正の整数である。

(証明おわり)

(2)  $a_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = (\alpha^n + \beta^n)^2 - 2\alpha^n\beta^n = a_n^2 - 2(-1)^n$

$a_{2n}$  が平方数であるとすれば,

$$a_n^2 - 2(-1)^n = m^2$$

を満たす自然数  $m$  が存在し,

$$a_n^2 - m^2 = (a_n + m)(a_n - m) = 2(-1)^n \quad \dots\dots (*)$$

(解法 1)

(1)より  $a_n > 0$  であるから, 特に

$$a_n + m > 0$$

1°  $n$  が偶数のとき, (\*)は

$$(a_n + m)(a_n - m) = 2$$

であり,

$$a_n + m > a_n - m > 0$$

であるから,

$$a_n + m = 2, \quad a_n - m = 1$$

の場合に限られ、辺々加えると

$$2a_n = 3$$

となって矛盾する。

2°  $n$  が奇数のとき、(\*)は

$$(a_n + m)(a_n - m) = -2$$

であり、この式を満たす整数の積の組は

$$(a_n + m, a_n - m) = (1, -2), (2, -1) \quad \therefore 2a_n = \pm 1$$

となって矛盾する。

よって、 $a_{2n}$  は平方数ではない。

(証明おわり)

(解法 2)

(1)より  $a_n$  は整数であり、

$$(m + a_n) - (m - a_n) = 2a_n \quad (\text{偶数})$$

であるから  $m + a_n$  と  $m - a_n$  の偶奇は一致し、積が  $\pm 2$  であることより

$$m + a_n, \quad m - a_n \quad \text{はともに偶数}$$

となる。ところが、このとき積は 4 の倍数となって、 $\pm 2$  にならないから矛盾する。

よって、 $a_{2n}$  は平方数ではない。

(証明おわり)

(解法 3)

$k$  を整数として、

$$(2k)^2 = 4k^2, \quad (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

となるから、平方数を 4 で割った余りは 0 または 1 であり、

$$a_n^2 - m^2 = 0, \pm 1 \pmod{4}$$

一方、

$$2(-1)^n = \pm 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

より(\*)は成り立たないから、 $a_{2n}$  は平方数ではない。

(証明おわり)

(注) 「 $a_{2n}$  が平方数ではない」とは、必然的に

「すべての自然数  $n$  に対して  $a_{2n}$  が平方数ではない」

の意味になるので、背理法を用いて示す場合、「 $a_{2n}$  が平方数である」と仮定できるのは 1 つの  $n$  の値に対してのみである。