

数チャレ 第141回 (2012年10月)

- (1) n が自然数であるとき, 3^n を 8 で割った余りを求めよ。
 (2) $m^2 - 2 = 3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

解答

(1) 二項定理より

$$\begin{aligned} 3^n &= (4 - 1)^n \\ &= (-1)^n + {}_n C_1 \cdot 4 \cdot (-1)^{n-1} + \sum_{k=2}^n {}_n C_k 4^k (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^{n-1} (4n - 1) + (8 \text{ の倍数}) \end{aligned}$$

ここで, $n = 2k - 1$ (k は自然数) と表されるとき

$$(-1)^{n-1} (4n - 1) = (-1)^{2k-2} \{4(2k - 1) - 1\} = 8(k - 1) + 3$$

$n = 2k$ (k は自然数) と表されるとき

$$(-1)^{n-1} (4n - 1) = (-1)^{2k-1} (4 \cdot 2k - 1) = -8k + 1$$

となるから, 3^n を 8 で割った余りは

$$n \text{ が奇数のとき } 3, \quad n \text{ が偶数のとき } 1 \quad (\text{答})$$

(別解)

$$3^{n+2} - 3^n = (3^2 - 1) \cdot 3^n = 8 \cdot 3^n$$

は 8 で割り切れるから,

$$3^{n+2} \equiv 3^n \pmod{8}$$

$3^1 = 3, 3^2 = 9 = 8 + 1$ であるから, 3^n を 8 で割った余りは

$$n \text{ が奇数のとき } 3, \quad n \text{ が偶数のとき } 1 \quad (\text{答})$$

(2) 背理法で証明する。

$$m^2 - 2 = 3^n$$

を満たす自然数 m, n があるとすれば, m は奇数であるから

$$m = 2a - 1 \quad (a \text{ は自然数})$$

と表され,

$$m^2 - 2 = 4a^2 - 4a + 1 - 2 = 4a(a - 1) - 1$$

a と $a - 1$ の一方は偶数であるから

$$m^2 - 2 \equiv -1 \pmod{8}$$

(1)より

$$3^n \equiv 3 \text{ または } 1 \pmod{8}$$

であるから, $m^2 - 2 = 3^n$ が成り立つことに矛盾する。

よって, $m^2 - 2 = 3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しない。 (証明おわり)

(別証) 転換法で証明してもよい。

k を整数として

$$(4k)^2 - 2 = 8(2k^2 - 1) + 6$$

$$(4k + 2)^2 - 2 = 8(2k^2 + 2k) + 2$$

$$(2k + 1)^2 - 2 = 8 \left\{ \frac{k(k+1)}{2} - 1 \right\} + 7$$

となるから,

$m^2 - 2$ を 8 で割った余りは 6, 2, 7 のいずれか

である。一方, (1) より 3^n を 8 で割った余りは 1 または 3 であるから,

$$m^2 - 2 \neq 3^n$$

であり, $m^2 - 2 = 3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しない。 (証明おわり)