

数チャレ 第142回 (2012年11月)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \text{ とする。}$$

- (1) $f(x)$ の最大値を求めよ。
(2) $f(x)$ が整数となる整数 x を求めよ。

解答

$$(1) \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = k \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= k(x^2 + 1) \\ \therefore (k-1)x^2 - 2x + k - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$k = 1$ のとき

$$-2x - 2 = 0 \text{ は実数解をもつ}$$

から, $k = 1$ はとり得る。

$k \neq 1$ のとき, x の2次方程式が実数解をもつ条件を考えて

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\text{判別式}) &= 1 - (k-1)(k-3) \geq 0 \\ k^2 - 4k + 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$k = 1$ とあわせて

$$2 - \sqrt{2} \leq k \leq 2 + \sqrt{2}$$

これは実数 x が存在するための必要十分条件であるから, 実際に $k = f(x)$ がとり得る値の範囲を表し, 特に

$$f(x) \text{ の最大値は } 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(別解1)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 2x + 2}{x^2 + 1} = 1 + 2 \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

最大値を求めるには,

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} > 0$$

のときだけ考えれば十分であり, 相加・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x + 1} &= \frac{(x + 1 - 1)^2 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 2}{x + 1} \\ &= x + 1 + \frac{2}{x + 1} - 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x + 1)\frac{2}{x + 1}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$f(x) \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2}$$

ここで, 不等式の等号は

$$x + 1 = \frac{2}{x + 1} > 0 \quad \text{すなわち} \quad x = -1 + \sqrt{2}$$

のとき成り立つから, $f(x)$ の最大値は

$$f(-1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(別解 2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+3) \cdot 2x}{x^2+1} \\ &= \frac{-2x^2 - 4x + 2}{x^2+1} \\ &= \frac{-2(x^2+2x-1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x^2+1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

x	$(-\infty)$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$(+\infty)$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	(1)	\searrow 極小	\nearrow 極大	\searrow (1)

$f(x)$ の最大値は

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1+3}{-2(-1+\sqrt{2})+1+1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(2) $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$, $x^2 + 1 > 0$ であるから, (1)の結果とあわせて
 $0 < f(x) \leq 2 + \sqrt{2}$

$1^2 < 2 < 2^2$ より $1 < \sqrt{2} < 2$ であるから, $f(x)$ が整数となるとき

$$f(x) = 1, 2, 3$$

が必要である。

(i) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = 1$ のとき

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 1$$

$$2x + 2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = 2 \text{ のとき}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 2(x^2 + 1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

このとき, x は整数ではない。

$$(iii) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = 3 \text{ のとき}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 3(x^2 + 1)$$

$$2x^2 - 2x = 2x(x - 1) = 0 \quad \therefore x = 0, 1$$

以上より, $f(x)$ が整数となる整数 x は

$$x = -1, 0, 1 \quad (\text{答})$$

(注) (1)において別解 1 以外の解法をとった場合は, $f(x)$ のとり得る値の範囲が

$$2 - \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2 + \sqrt{2}$$

と求められるので, これを根拠として, 整数 $f(x)$ が

$$f(x) = 1, 2, 3$$

に限られるとしてもよい。