

数チャレ 第143回 (2012年12月)

p, q, r がいずれも 100 以下の素数であるとき, 2 次方程式

$$px^2 + qx + r = 0$$

が有理数解をもつような (p, q, r) の組をすべて求めよ。

解答

2 次方程式

$$px^2 + qx + r = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の解

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$$

が有理数となるための条件は

$$q^2 - 4pr = d^2 \quad (d \text{ は非負整数})$$

と表されることである。この式を変形すると

$$4pr = q^2 - d^2 = (q + d)(q - d) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$(q + d) - (q - d) = 2d$ (偶数) より $q + d$ と $q - d$ の偶奇は等しいから,

$$q + d \text{ と } q - d \text{ はともに偶数}$$

であり,

$$0 < q - d < q + d$$

にも注意して, p, r が素数であることより

$$(q - d, q + d) = (2p, 2r), (2r, 2p), (2, 2pr)$$

$$\therefore q = p + r \text{ または } q = 1 + pr \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$p + r \geq 4, 1 + pr \geq 5$ より

q は奇素数

であるから, $q = p + r$ のときは p と q は偶奇が異なり, $q = 1 + pr$ のときは pr は偶数であり, いずれの場合も

$$p = 2 \text{ または } r = 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

である。

逆に, ③かつ④さえ満たせば,

$$p = 2, q = 2 + r \text{ のとき } 2x^2 + (r + 2)x + r = (x + 1)(2x + r)$$

$$r = 2, q = p + 2 \text{ のとき } px^2 + (p + 2)x + 2 = (x + 1)(px + 2)$$

$$p = 2, q = 2r + 1 \text{ のとき } 2x^2 + (2r + 1)x + r = (2x + 1)(x + r)$$

$$r = 2, q = 2p + 1 \text{ のとき } px^2 + (2p + 1)x + 2 = (x + 2)(px + 1)$$

となって 2 次方程式①は有理数解をもち,

題意の条件は ③かつ④であることと同値

である。

③かつ④は p と r について対称であるから, $r = 2$ として求めてから p と r を入れ

替えたものも解に追加することによりすべて求めることができる。

(i) $r = 2, q = p + 2 (\leq 100)$ のとき

$$(p, q) = (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \\ (59, 61), (71, 73)$$

(ii) $r = 2, q = 2p + 1 (\leq 100)$ のとき

$$(p, q) = (2, 5), (3, 7), (5, 11), (11, 23), (23, 47), \\ (29, 59), (41, 83)$$

以上より, 100 以下の素数で条件を満たすものは

$$(p, q, r) = (3, 5, 2), (2, 5, 3), (5, 7, 2), (2, 7, 5), \\ (11, 13, 2), (2, 13, 11), (17, 19, 2), (2, 19, 17), \\ (29, 31, 2), (2, 31, 29), (41, 43, 2), (2, 43, 41), \\ (59, 61, 2), (2, 61, 59), (71, 73, 2), (2, 73, 71), \\ (2, 5, 2), \\ (3, 7, 2), (7, 3, 2), (5, 11, 2), (2, 11, 5), \\ (11, 23, 2), (2, 23, 11), (23, 47, 2), (2, 47, 23), \\ (29, 59, 2), (2, 59, 29), (41, 83, 2), (2, 83, 41)$$

(答)

別解

整数係数 2 次方程式の 1 つの解が有理数ならば, もう 1 つの解も有理数である。

2 解を $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ (a, b, c, d は整数, $a > 0, c > 0$) とおくと,

$$px^2 + qx + r = (ax - b)(cx - d)$$

と因数分解されるから, 係数を比べると

$$p = ac \text{ かつ } r = bd$$

p, r は素数であるから

$$(b, d) = (\pm 1, \pm r), (\pm r, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

$$(a, c) = (1, p), (p, 1)$$

であり, $x > 0 \implies px^2 + qx + r > 0$ であることに注意すると,

$$\text{有理数解は } -1, -r, -\frac{1}{p}, -\frac{r}{p}$$

のいずれかに限られる。

$$x = -1 \text{ が解のとき } p - q + r = 0 \quad \therefore q = p + r$$

$$x = -r \text{ が解のとき } pr^2 - qr + r = 0 \quad \therefore q = pr + 1$$

$$x = -\frac{1}{p} \text{ が解のとき } \frac{1}{p} - \frac{q}{p} + r = 0 \quad \therefore q = pr + 1$$

$$x = -\frac{r}{p} \text{ が解のとき } \frac{r^2}{p} - \frac{qr}{p} + r = 0 \quad \therefore q = p + r$$

となって ③ が得られ, 以下は上の解答と同じ。

(参考)

差が2である素数の組 $(p, p+2)$ を双子素数といい, $2p+1$ が素数となるような素数 p をソフィ・ジェルマン素数という。いずれも無数に存在するであろうと予想されているが, まだ証明されていない。