

## 数チャレ 第143回(2012年12月)

$p, q, r$  がいずれも 100 以下の素数であるとき、2次方程式

$$px^2 + qx + r = 0$$

が有理数解をもつような  $(p, q, r)$  の組をすべて求めよ。

### 解答

2次方程式

$$px^2 + qx + r = 0 \quad \dots \dots \quad ①$$

の解

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$$

が有理数となるための条件は

$$q^2 - 4pr = d^2 \quad (d \text{ は非負整数})$$

と表されることである。この式を変形すると

$$4pr = q^2 - d^2 = (q+d)(q-d) \quad \dots \dots \quad ②$$

$(q+d) - (q-d) = 2d$  (偶数) より  $q+d$  と  $q-d$  の偶奇は等しいから、

$q+d$  と  $q-d$  はともに偶数

であり、

$$0 < q-d < q+d$$

にも注意して、 $p, r$  が素数であることより

$$(q-d, q+d) = (2p, 2r), (2r, 2p), (2, 2pr)$$

$$\therefore q = p+r \text{ または } q = 1+pr \quad \dots \dots \quad ③$$

$p+r \geq 4, 1+pr \geq 5$  より

$q$  は奇素数

であるから、 $q = p+r$  のときは  $p$  と  $q$  は偶奇が異なり、 $q = 1+pr$  のときは  $pr$  は偶数であり、いずれの場合も

$$p=2 \text{ または } r=2 \quad \dots \dots \quad ④$$

である。

逆に、③かつ④さえ満たせば、

$$p=2, q=2+r \text{ のとき } 2x^2 + (r+2)x + r = (x+1)(2x+r)$$

$$r=2, q=p+2 \text{ のとき } px^2 + (p+2)x + 2 = (x+1)(px+2)$$

$$p=2, q=2r+1 \text{ のとき } 2x^2 + (2r+1)x + r = (2x+1)(x+r)$$

$$r=2, q=2p+1 \text{ のとき } px^2 + (2p+1)x + 2 = (x+2)(px+1)$$

となって 2 次方程式①は有理数解をもち、

題意の条件は ③かつ④であることと同値

である。

③かつ④は  $p$  と  $r$  について対称であるから、 $r=2$  として求めてから  $p$  と  $r$  を入れ

替えたものも解に追加することによりすべて求めることができる。

(i)  $r = 2, q = p + 2 (\leq 100)$  のとき

$$(p, q) = (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \\ (59, 61), (71, 73)$$

(ii)  $r = 2, q = 2p + 1 (\leq 100)$  のとき

$$(p, q) = (2, 5), (3, 7), (5, 11), (11, 23), (23, 47), \\ (29, 59), (41, 83)$$

以上より、100以下の素数で条件を満たすものは

$$(p, q, r) = (3, 5, 2), (2, 5, 3), (5, 7, 2), (2, 7, 5), \\ (11, 13, 2), (2, 13, 11), (17, 19, 2), (2, 19, 17), \\ (29, 31, 2), (2, 31, 29), (41, 43, 2), (2, 43, 41), \\ (59, 61, 2), (2, 61, 59), (71, 73, 2), (2, 73, 71), \\ (2, 5, 2), \\ (3, 7, 2), (7, 3, 2), (5, 11, 2), (2, 11, 5), \\ (11, 23, 2), (2, 23, 11), (23, 47, 2), (2, 47, 23), \\ (29, 59, 2), (2, 59, 29), (41, 83, 2), (2, 83, 41)$$

(答)

### 別解

整数係数2次方程式の1つの解が有理数ならば、もう1つの解も有理数である。

2解を  $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$  ( $a, b, c, d$  は整数,  $a > 0, c > 0$ ) とおくと、

$$px^2 + qx + r = (ax - b)(cx - d)$$

と因数分解されるから、係数を比べると

$$p = ac \text{かつ} r = bd$$

$p, r$  は素数であるから

$$(b, d) = (\pm 1, \pm r), (\pm r, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

$$(a, c) = (1, p), (p, 1)$$

であり、 $x > 0 \implies px^2 + qx + r > 0$  であることに注意すると、

$$\text{有理数解は } -1, -r, -\frac{1}{p}, -\frac{r}{p}$$

のいずれかに限られる。

$$x = -1 \text{ が解のとき} \quad p - q + r = 0 \quad \therefore q = p + r$$

$$x = -r \text{ が解のとき} \quad pr^2 - qr + r = 0 \quad \therefore q = pr + 1$$

$$x = -\frac{1}{p} \text{ が解のとき} \quad \frac{1}{p} - \frac{q}{p} + r = 0 \quad \therefore q = pr + 1$$

$$x = -\frac{r}{p} \text{ が解のとき} \quad \frac{r^2}{p} - \frac{qr}{p} + r = 0 \quad \therefore q = p + r$$

となって③が得られ、以下は上の解答と同じ。

(参考)

差が 2 である素数の組  $(p, p + 2)$  を双子素数といい、 $2p + 1$  が素数となるような素数  $p$  をソフィ・ジエルマン素数という。いずれも無数に存在するであろうと予想されているが、まだ証明されていない。