

数チャレ 第145回 (2013年2月)

正の整数 x, y, z, n に対して

$$x^2 = 7^{2n}(y^2 + 10z^2)$$

が成立しているとする。

- (1) 整数の2乗を3で割った余りは0または1であることを示せ。
- (2) yz は3の倍数であることを示せ。
- (3) y, z が共に素数のとき x を n を用いて表せ。

出典：2003年 千葉大学 理学部

解答

$$x^2 = 7^{2n}(y^2 + 10z^2) \quad \dots\dots (*)$$

- (1) 3で割った余りで分類すると、 m を整数として

$$(3m)^2 = 3 \times 3m^2, \quad (3m \pm 1)^2 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$$

のいずれかの場合で尽くされるから、平方数を3で割った余りは0または1である。
(証明おわり)

- (2) y も z も3で割り切れないとすれば、(1)より y^2 も z^2 も3で割ると1余るから、
 $y^2 + 10z^2$ は3で割ると2余る。

さらに、 $7^{2n} = (7^n)^2$ は3で割ると1余るから、

$$7^{2n}(y^2 + 10z^2) \text{ は3で割ると2余る。}$$

- (1)より x^2 を3で割った余りは0または1であるから

$$x^2 \neq 7^{2n}(y^2 + 10z^2)$$

以上の対偶をとると、(*)を満たすならば y または z は3の倍数であり、 yz は3の倍数である。
(証明おわり)

- (3) y, z が共に素数のとき、(2)より

$$y = 3 \text{ または } z = 3$$

(*)より

$$y^2 + 10z^2 = m^2$$

を満たす正の整数 m が存在して、

$$10z^2 = m^2 - y^2 = (m + y)(m - y)$$

ここで、

$$(m + y) - (m - y) = 2y \text{ (偶数)}$$

より $m + y$ と $m - y$ の偶奇は等しいが、積が $10z^2$ (偶数) であることより、

$$m + y \text{ と } m - y \text{ はともに偶数}$$

である。したがって、 $10z^2$ は4で割り切れるから、

z は偶数
であり, z が素数であることより

$$z = 2 \neq 3$$

に定まる。このとき

$$y = 3$$

であり, (*)より

$$x^2 = 7^{2n}(3^2 + 10 \times 2^2) = 7^{2n} \times 49 = 7^{2n+2}$$

x は正の整数であるから

$$x = 7^{n+1} \quad (\text{答})$$