

## 数チャレ 第146回 (2013年3月)

整数  $p, q$  に対して, 多項式

$$f(x) = 2x^4 + (p + 2q)x^3 + (pq + 4)x^2 + (2p + 2)x + p$$

を考える.  $f(0), f(1), f(2)$  がすべて素数のとき,  $p = \boxed{\text{工}}$ ,  $q = \boxed{\text{オ}}$  である.

出典: 2013年 早稲田大学 スポーツ科学部

解答

$$f(0) = p$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + (p + 2q) + (pq + 4) + (2p + 2) + p \\ &= pq + 4p + 2q + 8 \\ &= (p + 2)(q + 4) \end{aligned}$$

$f(0) = p$  は素数であるから

$$p \geq 2$$

が必要であり,

$$f(1) = (p + 2)(q + 4) \text{ が素数, } p + 2 \geq 4$$

であることより

$$q + 4 = 1 \quad \therefore q = \boxed{\text{オ}} \text{ (オ)}$$

このとき,

$$f(x) = 2x^4 + (p - 6)x^3 + (4 - 3p)x^2 + (2p + 2)x + p$$

$$f(2) = 32 + 8(p - 6) + 4(4 - 3p) + 2(2p + 2) + p = p + 4$$

$f(0) = p, f(1) = p + 2, f(2) = p + 4$  はすべて素数であり, 3で割った余りが相異なるから, そのうち一つは3である.

$$4 \leq p + 2 \leq p + 4$$

であるから,

$$p = \boxed{\text{工}} \text{ (工)}, p + 2 = 5, p + 4 = 7$$

となる.