

数チャレ 第147回 (2013年4月)

x, y, z, p は自然数で

$$xy + yz + zx = pxyz, \quad x \leq y \leq z \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

問1 $p \leq 3$ を示せ．

問2 ①を満たす自然数の組 (p, x, y, z) をすべて求めよ．

出典：2013年 旭川医科大学

解答

問1 $1 \leq x \leq y \leq z$ より

$$xy \leq zx \leq yz$$

であるから，①より

$$0 + yz + 0 < pxyz \leq yz + yz + yz = 3yz$$

$$\therefore 1 < px \leq 3$$

$p \geq 1, x \geq 1$ より

$$p \leq px \leq 3$$

(おわり)

問2 問1の考察より $1 < px \leq 3$ であるから

$$(p, x) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$$

に限られる。

(i) $(p, x) = (1, 2)$ のとき

$$2y + yz + 2z = 2yz$$

$$yz - 2y - 2z = 0 \quad \therefore (y-2)(z-2) = 4$$

$x-2 = 0 \leq y-2 \leq z-2$ より

$$(y-2, z-2) = (1, 4), (2, 2)$$

$$\therefore (y, z) = (3, 6), (4, 4)$$

(ii) $(p, x) = (2, 1)$ のとき

$$y + yz + z = 2yz$$

$$yz - y - z = 0 \quad \therefore (y-1)(z-1) = 1$$

$x-1 = 0 \leq y-1 \leq z-1$ より

$$y-1 = z-1 = 1 \quad \therefore y = z = 2$$

(iii) $(p, x) = (1, 3)$ のとき

$$3y + yz + 3z = 3yz$$

$$yz = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z$$

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\therefore (2y - 3)(2z - 3) = 9$$

$$2x - 3 = 3 \leq 2y - 3 \leq 2z - 3 \text{ より}$$

$$2y - 3 = 2z - 3 = 3 \quad \therefore y = z = 3$$

(iv) $(p, x) = (3, 1)$ のとき

$$y + yz + z = 3yz$$

$$yz = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (2y - 1)(2z - 1) = 1$$

$$2x - 1 = 1 \leq 2y - 1 \leq 2z - 1 \text{ より}$$

$$2y - 1 = 2z - 1 = 1 \quad \therefore y = z = 1$$

以上より, 求める自然数の組は

$$(p, x, y, z) = (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 4), (2, 1, 2, 2), \\ (1, 3, 3, 3), (3, 1, 1, 1)$$

(答)