

数チャレ 第148回 (2013年5月)

a, d を正の整数とする. $x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d, x_4 = a + 3d$ とおく.
 x_1, x_2, x_3, x_4 がすべて素数であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a は奇数であることを示せ. また, d は偶数であることを示せ.
- (2) d は3の倍数であることを示せ.
- (3) $x_3 = 67$ であるとき, a, d の値を求めよ.

出典: 2013年 奈良女子大学 生活環境学部

解答

- (1) $x_1 = a$ が偶数であるとすれば, $x_3 = a + 2d$ は $a (\geq 2)$ より大きい偶数となって, x_3 が素数であることに反するから,

a は奇数

である。

d が奇数であるとすれば, $x_2 = a + d < x_4 = a + 3d$ はともに偶数となって, x_4 が素数であることに反するから,

d は偶数

である。

(証明おわり)

- (2) d が3で割り切れないとすれば,

$$x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d$$

を3で割った余りは相異なることになり, そのうち1つは3の倍数となる。3で割り切れる素数は3だけであるから,

$$x_1, x_2, x_3 \text{ のうち 1つは } 3$$

である。同様の議論から

$$x_2, x_3, x_4 \text{ のうち 1つは } 3$$

であり,

$$x_2 = 3 \text{ または } x_3 = 3$$

である。 $d \geq 2$ (正の偶数) より

$$x_2 = 3 \text{ のとき } x_1 \leq 1$$

$$x_3 = 3 \text{ のとき } x_2 \leq 1$$

となって, いずれも x_1 が素数であることに反する。

よって, d は3の倍数である。

(証明おわり)

- (3) 2と3は互いに素であるから, (1), (2)より

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = d \text{ は } 6 \text{ の倍数}$$

である。

$x_3 = 67$ のとき

$$(x_2, x_1) = (61, 55), (55, 43), (49, 31), (43, 19), (37, 7)$$

が必要であり, このうち x_1 も x_2 も素数であるのは

$$(x_2, x_1) = (43, 19), (37, 7)$$

のいずれかに限られる。

$$x_1 = 19, x_2 = 43 \text{ のとき } x_4 = 91 = 7 \times 13$$

$$x_1 = 7, x_2 = 37 \text{ のとき } x_4 = 97$$

であるから, x_4 も素数となるのは

$$x_1 = 7, x_2 = 37, x_3 = 67, x_4 = 97$$

の場合に決まる。したがって,

$$a = 7, d = 30 \quad (\text{答})$$

である。