

数チャレ 第149回 (2013年6月)

- (1) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解に持つ整数係数4次方程式を1つ求めよ
(2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数でないことを証明せよ。

解答

(1) $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$ の両辺を平方すると
$$(x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$
$$\therefore x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x$$

さらに両辺平方して

$$(x^2 - 1)^2 = 8x^2 \quad \therefore x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \quad (\text{答})$$

- (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が有理数であるとすれば,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数})$$

と表され, (1)より

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0$$
$$a^4 - 10a^2b^2 + b^4 = 0$$
$$\therefore a^4 = b^2(10a^2 - b^2)$$

ここで, a^4 は b で割り切れるが, a と b は互いに素である(共通な素因数をもたない)から, $b > 0$ も考えて

$$b = 1$$

となって, a は

$$a^4 - 10a^2 + 1 = 0$$

を満たす整数である。このとき

$$a^2(10 - a^2) = 1$$

であるから

$$a^2 = 10 - a^2 = 1$$

を満たす場合に限られるが, これは成り立たない。

以上より, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数ではない。

(証明おわり)

(注)

1° 無理数の和は必ずしも無理数というわけではないので, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ がそれぞれ無理数であることを示すだけでは証明は完結しない。

2° (2)の最後の部分は, 2次関数 $f(x) = x^2 - 10x + 1$ のグラフを想定して

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = -8 < 0$$

$$f(3^2) = -8 < 0$$

$$f(4^2) = 97 > 0$$

より整数 a が $f(a^2) = 0$ を満たさないことを導いてもよい。

もっとも、(正しいことを導くのと違って) 矛盾の導き方はいくらでも存在し得るので、別法を言い出してもキリがない。

3° $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ の一方の無理性が示されれば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の無理性も容易に示されることを、首都大の坂田繁洋氏から御指摘いただいた。

例えば、 $\sqrt{2}$ が無理数であることが示されていたとして、

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ が有理数}$$

であるとすれば、有理数は除法について閉じているから

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ も有理数}$$

であり、有理数は減法について閉じているから

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \text{ も有理数,}$$

さらには

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ も有理数}$$

となって矛盾する。