

数チャレ 第150回 (2013年7月)

自然数 n に対して, $n^2 + 4$ と $n + 2$ の最大公約数を d_n で表し,

$$S_n = \sum_{k=1}^n d_k \text{ とするとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ を求めよ.}$$

解答

$$n^2 + 4 = (x + 2)(x - 2) + 8$$

より

$$\begin{aligned} d_n &= \gcd(n^2 + 4, n + 2) \\ &= \gcd(n + 2, 8) \\ &= \begin{cases} 1 & (2 \neq n) \\ 2 & (n \equiv 0, 4 \pmod{8}) \\ 4 & (n \equiv 2 \pmod{8}) \\ 8 & (n \equiv 6 \pmod{8}) \end{cases} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_{8n} &= \sum_{k=1}^n (d_{8k} + d_{8k-1} + d_{8k-2} + \cdots + d_{8k-7}) \\ &= \sum_{k=1}^n (2 + 1 + 8 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1) \\ &= 20n \end{aligned}$$

$r = 0, 1, 2, \dots, 7$ に対して

$$\begin{aligned} S_{8n-7} &\leq S_{8n-r} \leq S_{8n} \\ \therefore \frac{20n-19}{8n-r} &\leq \frac{S_{8n-r}}{8n-r} \leq \frac{20n}{8n-r} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n-19}{8n-r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{19}{4n}}{2 - \frac{r}{4n}} = \frac{5}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n}{8n-r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2 - \frac{r}{4n}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから, ハサミウチの原理より, r によらず

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{8n-r}}{8n-r} = \frac{5}{2}$$

が成り立つ。よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$