

数チャレ 第151回 (2013年8月)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の各成分は整数であり, A^3 は単位行列である。このような性質をもつ2次正方行列の集合を S とする。

- (1) 集合 S に属する行列のトレース $a + d$ の値を求めよ。
- (2) 集合 S に属する3つの行列 L, M, N をどのように選んでも, $L + M = N$ とはできないことを証明せよ。

解答

$$(1) \quad \det(A^3) = (\det A)^3$$

であるから, $A^3 = E$ (単位行列) より

$$(\det A)^3 = \det E = 1$$

$\det A$ は整数(特に実数)であるから

$$\det A = 1$$

$t = a + d$ とおくと, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - tA + E = O$$

であるから,

$$A^2 = tA - E$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = tA^2 - A = t(tA - E) - A = (t^2 - 1)A - tE$$

$A^3 = E$ より

$$(t^2 - 1)A = (t + 1)E \quad \therefore t = -1 \text{ または } A = \frac{1}{t - 1}E$$

A がスカラー行列のとき

$$\frac{1}{t - 1} = 1 \quad \therefore t = 2$$

以上より, $t = a + d$ の値は

$$a + d = -1, 2 \quad (\text{答})$$

- (2) $L + M = N$ ($L, M, N \in S$) が成り立つとすれば矛盾することを示す。

$E + E \neq E$ より, L, M, N の少なくとも1つは単位行列ではない。

$A \in S$, $A \neq E$ のとき, $\text{tr}(A) = a + d = -1$ より

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a - 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -a(a + 1) - bc = 1$$

このとき, $bc = -a(a + 1) - 1$ であり, a と $a + 1$ の一方は偶数であるから,

b と c はともに奇数

である。よって, $(1, 2)$ 成分および $(2, 1)$ 成分に注目すると, L, M, N のうち1つだけが単位行列である。

$N = E$ のとき

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha-1 \end{pmatrix}$$

と表されて,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

において (1, 1) 成分および (2, 2) 成分をそれぞれ比べると

$$a + \alpha = 1 \quad \text{かつ} \quad -(a + \alpha) - 2 = 1$$

となって矛盾する。

$N \neq E$ のとき

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-1 \end{pmatrix}, \quad L, M \text{ のうち } E \text{ でない方は } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha-1 \end{pmatrix}$$

と表されて,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

において (1, 1) 成分および (2, 2) 成分をそれぞれ比べると

$$a - \alpha = 1 \quad \text{かつ} \quad -(a - \alpha) = 1$$

となって矛盾する。

以上より, S に属する任意の行列 L, M, N に対して

$$L + M \neq N$$

である。

(証明おわり)

(注) 4 乗すれば単位行列になるものであれば,

$$X^4 = Y^4 = Z^4 = E, \quad X + Y = Z$$

を満たす例として

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

がある。このとき, X, Y, Z は

$$X^5 + Y^5 = Z^5$$

の非自明解の例となる。

$$X^4 + Y^4 = Z^4$$

についても同様の手法で非自明解を求めようとして, このタイプの行列は存在しないことを示したのが本問である。

ちなみに, 3 乗して単位行列にはならないが,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は $X^4 + Y^4 = Z^4$ の非自明解となる。