

数チャレ 第152回 (2013年9月)

n は十進表示で一 の位と十の位が異なる2桁の自然数であり、 n の一 の位と十の位を入れ替えてできる2桁の自然数を m とする。

$m^2 - n^2$ が平方数となるような自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

解答

n は2桁の自然数であり、一 の位と十の位を入れ替えると m になるから

$$n = 10a + b, \quad m = 10b + a \quad \dots\dots ①$$

とおくことができ、 $a \neq b$ と $m - n = 9(b - a) \geq 0$ より、 a, b は

$$1 \leq a < b \leq 9 \quad \dots\dots ②$$

を満たす整数である。

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 11(a + b) \cdot 9(a - b)$$

が平方数となるための条件は

$$(b + a)(b - a) = 11c^2 \quad (c \text{は正の整数}) \quad \dots\dots ③$$

と表されることである。

11は素数であるから

$$b + a \text{ または } b - a \text{ は } 11 \text{ で割り切れる}$$

が、②より $0 < b - a < 9$ であるから

$$b + a \text{ が } 11 \text{ で割り切れる}$$

ことになる。②より $1 + 2 \leq b + a \leq 8 + 9$ であるから

$$b + a = 11$$

であり、これを満たす a, b は

$$(a, b) = (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$$

であるが、

$$9^2 - 2^2 = 77 = 11 \times 7$$

$$8^2 - 3^2 = 55 = 11 \times 5$$

$$7^2 - 4^2 = 33 = 11 \times 3$$

$$6^2 - 5^2 = 11$$

より、③を満たすのは

$$(a, b) = (5, 6)$$

に限られる。

①に代入して m, n を求め、条件を満たす自然数の組は

$$(m, n) = (65, 56) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(別解) ③を導くまでは同じである。

②, ③より

$$11c^2 = b^2 - a^2 < 9^2 = 81$$

であるから,

$$c^2 = 1 \text{ または } 4 \quad \therefore c = 1 \text{ または } 2$$

(i) $c = 1$ のとき

③より

$$(b + a)(b - a) = 11$$

$0 < b - a < b + a$ に注意すると, 整数の積の組は

$$b + a = 11, \quad b - a = 1$$

の場合に限られ, これを解くと

$$a = 5, \quad b = 6$$

①に代入して

$$(m, n) = (65, 56)$$

(ii) $c = 2$ のとき

③より

$$(b + a)(b - a) = 44$$

$0 < b - a < b + a$ および $(b + a) - (b - a) = 2a$ (偶数) であることに注意すると, 整数の積の組は

$$b + a = 22, \quad b - a = 2$$

の場合に限られ, これを解くと

$$a = 10, \quad b = 12$$

となるが, これは②に反する。

以上より, 条件を満たす自然数の組は

$$(m, n) = (65, 56) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注)

1° $b + a = 11$ とおいてみることで十分条件はすぐに見つかるので, 題意の中心は必要条件の論証にあることはわかるだろう。いろんな可能性が残るので, 意外と説明を要する。

2° 不定方程式

$$b^2 - a^2 = 11c^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

を一般に解く方法も考えられるが, ②より範囲が限られているので, 直接調べる方針をとる方が得策である。

3° ②より a, b の組は 36 通りだけなので, そのすべてについて $m^2 - n^2$ を計算して平方数であるかどうかを確かめる解法でも正解である。十分条件しか調べない解答よりはまともな感覚である。ただし, あまりおすすめできない。