

数チャレ 第153回 (2013年10月)

$x^3 + y^3 = (x + y)^2$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。

解答

$x + y = 0$ のとき

$$y = -x$$

$x + y \neq 0$ のとき, 与えられた方程式は

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

$$\therefore x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0 \quad \dots\dots (*)$$

x が実数であることが必要であるから

$$(\text{判別式}) = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) \geq 0$$

$$-3y^2 + 6y + 1 \geq 0$$

$$\therefore 3(y - 1)^2 \leq 4$$

y は整数であるから, $(y - 1)^2 = 0$ または 1 に限られ,

$$y - 1 = 0, \pm 1 \quad \therefore y = 0, 1, 2$$

(i) $y = 0$ ($\neq -x$) のとき, 方程式(*)は

$$x^2 - x = x(x - 1) = 0 \quad \therefore x = 1$$

(ii) $y = 1$ ($\neq -x$) のとき, 方程式(*)は

$$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 0, 2$$

(iii) $y = 2$ ($\neq -x$) のとき, 方程式(*)は

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$$

以上より, 求める整数の組は

$$(x, y) = (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (n, -n) \quad (\text{答})$$

$(n \text{ は整数})$

(注)

1° $-3y^2 + 6y + 1 \geq 0$ を満たす整数 y を絞り込む場面で,

$$f(y) = -3y^2 + 6y + 1$$

とおき,

$$f(-1) = -8 < 0, \quad f(0) = 1 \geq 0, \quad f(2) = 1 \geq 0, \quad f(3) = -8 < 0$$

により $y = 0, 1, 2$ と絞ってもよい。

2° 本問は対称式の不定方程式ではあるが, $x \leq y$ (または $x \geq y$) により有効な評価式は得られない。