

# 数チャレ 第154回 (2013年11月)

- (1) 奇数の平方を4で割った余りを求めよ。  
 (2)  $x^2 + y^2 = 3z^2$ を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しないことを示せ。

解答

- (1) 奇数は

$$2n + 1 \quad (n \text{ は整数})$$

と表され, その平方

$$(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$$

を4で割った余りは

$$1 \quad (\text{答})$$

- (2)  $x^2 + y^2 = 3z^2$ を満たす自然数  $x, y, z$  が存在すると仮定する。

偶数の平方は4の倍数, 奇数の平方は4で割ると1余るから,  $x^2 + y^2$ を4で割った余りは

$x^2$	$y^2$	$x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

ですべての場合が尽くされる。 $z^2$ を4で割った余りも0または1であるから,  $3z^2$ を4で割った余りは0または3となり,

$x, y$ がともに偶数

である場合に限られる。

$$\gcd(x, y) = 2^n d \quad (n \text{ は自然数}, d \text{ は正の奇数})$$

とすると,  $3z^2 (= x^2 + y^2)$ は $2^{2n}$ で割り切れ, 3と $2^{2n}$ は互いに素であるから,

$$\frac{z}{2^n} \text{ は自然数}$$

であり,

$$\left(\frac{x}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{y}{2^n}\right)^2 = 3\left(\frac{z}{2^n}\right)^2$$

が成り立つ。ところが,  $\frac{x}{2^n}$ または $\frac{y}{2^n}$ は奇数であるから, 既に示したことと矛盾する。

以上より,  $x^2 + y^2 = 3z^2$ を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

(証明おわり)

別解

3で割った余りに注目して解いてもよい。

$n$ を整数として、

$$(3n)^2 = 3(3n^2), \quad (3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$$

となるから、平方数を3で割った余りは0または1であり、 $x^2 + y^2$ を3で割った余りは

$x^2$	$y^2$	$x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

ですべての場合が尽くされる。このことから

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

を満たす自然数  $x, y, z$  が存在するとすれば、

$$x, y \text{ はともに } 3 \text{ の倍数}$$

である場合に限られる。

$$\gcd(x, y) = 3^n d \quad (n \text{ は自然数, } d \text{ は } 3 \text{ と互いに素な整数})$$

とすると、 $3z^2 (= x^2 + y^2)$  は  $3^{2n}$  で割り切れ、

$$\frac{3z^2}{3^{2n}} = \frac{1}{3} \left( \frac{z}{3^{n-1}} \right)^2 \text{ は自然数}$$

である。3は素数であるから  $\frac{z}{3^{n-1}}$  は3で割り切れ、

$$\frac{z}{3^n} \text{ は自然数}$$

であり、

$$\left( \frac{x}{3^n} \right)^2 + \left( \frac{y}{3^n} \right)^2 = 3 \left( \frac{z}{3^n} \right)^2$$

が成り立つ。ところが、 $\frac{x}{3^n}$  または  $\frac{y}{3^n}$  は3で割り切れないから、既に示したことと矛盾する。

以上より、 $x^2 + y^2 = 3z^2$  を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

(証明おわり)

(注) 少し工夫すれば、初めから  $x$  と  $y$  が互いに素の場合に帰着させることができる。

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

を満たす自然数  $x, y, z$  があるとすれば、その中に  $z$  が最小となる組  $(x_0, y_0, z_0)$  が存在する。 $x_0$  と  $y_0$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p^2 | 3z_0^2$  より  $p | z_0$  であり、

$$\left( \frac{x_0}{p} \right)^2 + \left( \frac{y_0}{p} \right)^2 = 3 \left( \frac{z_0}{p} \right)^2$$

が成り立つ。ところが、

$$(1 \leq) \frac{z_0}{p} < z_0$$

であるから、 $z_0$ の最小性に反する。よって、

$x_0$ と $y_0$ は互いに素

である。