

数チャレ 第155回 (2013年12月)

座標平面上で $O(0, 0)$, $A(2013, 25)$ とし, 連立不等式

$$0 < x < 2013, \quad 0 < y < 25$$

で表される領域を D とする。

- (1) 線分 OA 上には両端を除いて格子点はないことを示せ。
- (2) $25, 25 \times 2, 25 \times 3, \dots, 25 \times 2012$ を 2013 で割った余りは相異なることを示せ。
- (3) 領域 D 内の格子点 P を中心として直線 OA に接する円の半径の最小値を求めよ。

解答

- (1) 直線 OA の方程式は $y = \frac{25}{2013}x$ であり, $25 (= 5^2)$ と 2013 は互いに素であるから,

直線 OA の格子点は

$$(2013n, 25n) \quad (n \text{ は整数})$$

と表されるものに限られる。よって, 線分 OA 上の両端を除いた $0 < x < 2013$ の範囲には格子点はない。 (証明おわり)

- (2) i, j を $1 \leq j < j \leq 2012$ を満たす整数であるとすれば,

$$25j - 25i = 25(j - i), \quad 0 < j - i < 2013$$

であり, 2013 と 25 は互いに素であるから, $25j - 25i$ は 2013 で割り切れない。

よって, $i \neq j$ ならば, $25i$ と $25j$ は 2013 で割った余りは異なる。 (証明おわり)

- (3) $a_k = \left[\frac{25k}{2013} \right]$ とおき, 格子点 $P_k(k, a_k)$ ($k = 1, 2, \dots, 2012$) を考える。

整数部分の定義より

$$a_k \leq \frac{25k}{2013} < a_k + 1$$

$$2013a_k \leq 25k < 2013a_k + 2013$$

$$\therefore 0 \leq 25k - 2013a_k < 2013$$

(1)より

$$0 < 25k - 2013a_k < 2013$$

P_k を中心とする半径 r_k の円が直線 OA に接するとき, 点と直線の距離公式より

$$r_k = \frac{|25k - 2013a_k|}{\sqrt{25^2 + 2013^2}} = \frac{25k - 2013a_k}{\sqrt{4052794}}$$

(2)より, 2012 個の整数 $25k - 2013a_k$ を 2013 で割った余りはすべて異なるから,

$$25n - 2013a_k = 1, \quad 1 \leq n \leq 2012$$

を満たす整数 n が (ただ一つ) 存在する。よって,

$$\text{求める最小値は } r_n = \frac{1}{\sqrt{4052794}} \quad (\text{答})$$