

数チャレ 第156回(2014年1月)

$2+0+1+4=7$ で割った余りの集合において平方剰余は2, 0, 1, 4である。このように, 0から9までの整数2個以上から成る集合が, 要素の総和で割った余りにおいて平方剰余全体となるような集合をすべて求めよ。

解答

題意の条件を満たす集合を S とし, S に属する要素の和を n とする。

$S \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ であり, $n > 16$ のとき平方剰余 16 は S に属さないから,

$$n \leq 16$$

の範囲だけ調べればよい。

奇数の平方を8で割った余りが1であることに注意すると,

mod 16 における平方剰余は 0, 1, 4, 9 のみ

であり,

$$0+1+4+9 \neq 16$$

であるから, $n = 16$ は条件を満たさない。

$$5^2 \equiv 10 \pmod{15}, \quad 10 \notin S$$

$$5^2 \equiv 11 \pmod{14}, \quad 11 \notin S$$

より, $n = 15, 14$ は条件を満たさない。

$$0+1+4+9 = 14$$

より $10 \leq n \leq 13$ も条件を満たさないから,

$$n \leq 9$$

に限られる。

以下, 直接 $0^2, 1^2, 2^2, \dots, (n-1)^2$ を調べると,

mod 9 における平方剰余は 0, 1, 4, 7 であり, $0+1+4+7 \neq 9$

mod 8 における平方剰余は 0, 1, 4 であり, $0+1+4 \neq 8$

mod 6 における平方剰余は 0, 1, 4, 3 であり, $0+1+4+3 \neq 6$

mod 5 における平方剰余は 0, 1, 4 であり, $0+1+4 = 5$

$2 \leq n \leq 4$ では平方剰余は 0, 1 であり, $0+1 \neq n$

以上より, 求める集合は

$$\{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 4\} \quad (\text{答})$$