

数チャレ 第157回 (2014年2月)

整数 m, n が $1 \leq m < n$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $x > 3$ ならば, 不等式

$$(mx - 1)(nx - 1) > x^2 + 1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\tan \alpha = \frac{1}{m}$, $\tan \beta = \frac{1}{n}$ を満たし, かつ $\tan(\alpha + \beta)$ の値が整数となる角度 α, β があるとす。このような (m, n) の組をすべて求めよ。

出典: 2004年 熊本大学

解答

(1) $1 \leq m < n$ のとき

$$mn - 1 \geq 1 \times 2 - 1 > 0$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned} (mx - 1)(nx - 1) - (x^2 + 1) &= (mn - 1)x^2 - (m + n)x \\ &= (mn - 1)x \left(x - \frac{m + n}{mn - 1} \right) \end{aligned}$$

であるから, $\frac{m + n}{mn - 1} \leq 3$ が示されれば証明は終わる。

$$\begin{aligned} 3(mn - 1) - (m + n) &= 3mn - m - n - 3 \\ &= 3 \left(m - \frac{1}{3} \right) \left(n - \frac{1}{3} \right) - \frac{10}{3} \\ &\geq 3 \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{10}{3} = 0 \end{aligned}$$

より $\frac{m + n}{mn - 1} \leq 3 < x$ であるから,

$$x > 3 \text{ ならば } (mx - 1)(nx - 1) > x^2 + 1$$

が成り立つ。

(証明おわり)

(2) $\tan \alpha = \frac{1}{m}$, $\tan \beta = \frac{1}{n}$ のとき, 加法定理より

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{m + n}{mn - 1}$$

(1)の考察より, $1 \leq m < n$ のとき

$$0 < \frac{m + n}{mn - 1} \leq 3$$

であるから, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{m+n}{mn-1}$ が整数であるとすれば,

$$\frac{m+n}{mn-1} \text{ は } 1, 2, 3 \text{ のいずれか}$$

となる。

(i) $\frac{m+n}{mn-1} = 1$ のとき

$$mn-1 = m+n \quad \therefore (m-1)(n-1) = 2$$

$0 \leq m-1 < n-1$ を考えて,

$$m-1 = 1 \text{ かつ } n-1 = 2 \quad \therefore (m, n) = (2, 3)$$

(ii) $\frac{m+n}{mn-1} = 2$ のとき

$$mn-1 = \frac{1}{2}(m+n)$$

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\therefore (2m-1)(2n-1) = 5$$

$1 \leq 2m-1 < 2n-1$ を考えて,

$$2m-1 = 1 \text{ かつ } 2n-1 = 5 \quad \therefore (m, n) = (1, 3)$$

(iii) $\frac{m+n}{mn-1} = 3$ のとき

(1)における不等式の等号成立条件をより

$$(m, n) = (1, 2)$$

以上より, 求める整数の組は

$$(m, n) = (1, 2), (1, 3), (2, 3) \quad (\text{答})$$