

## 数チャレ 第158回 (2014年3月)

$m, n$  ( $m < n$ ) を自然数とし,

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが  $a, b, c$  である三角形の内接円の半径を  $r$  とし, その三角形の面積を  $S$  とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1)  $a^2 + b^2 = c^2$  を示せ.
- (2)  $r$  を  $m, n$  を用いて表せ.
- (3)  $r$  が素数のときに,  $S$  を  $r$  を用いて表せ.
- (4)  $r$  が素数のときに,  $S$  が 6 で割り切れることを示せ.

出典: 2014年 神戸大学

### 解答

(1)  $a^2 + b^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 - m^2)^2 + 4n^2m^2 = (n^2 + m^2)^2 = c^2$   
(証明おわり)

(2) 題意の三角形は, 直角をはさむ 2 辺の長さが  $a, b$  である直角三角形であることを考え, 面積  $S$  を 2 通りに表すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr &= \frac{1}{2}ab \\ \therefore r &= \frac{ab}{a+b+c} = \frac{2mn(n^2 - m^2)}{(n^2 - m^2) + 2mn + (n^2 + m^2)} \\ &= \frac{2mn(n+m)(n-m)}{2n(n+m)} \\ &= m(n-m) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)  $r$  が素数のとき, (2)より

$$(m, n-m) = (1, r), (r, 1) \quad \therefore (m, n) = (1, r+1), (r, r+1)$$

であるから, 直角三角形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2mn(n^2 - m^2) \\ &= mn(n+m)(n-m) \\ &= n(n+m)r \\ &= r(r+1)(r+2), \quad r(r+1)(2r+1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) 隣り合う整数の一方は偶数であるから,

$r(r+1)(r+2)$  は 2 で割り切れる。

連続する 3 つの整数の 1 つは 3 で割り切れるから、

$r(r+1)(r+2)$  は 3 で割り切れる。

2 と 3 は互いに素であるから、

$r(r+1)(r+2)$  は 6 で割り切れる。

このことを用いると、

$$\begin{aligned} r(r+1)(2r+1) &= r(r+1)(r+2+r-1) \\ &= r(r+1)(r+2) + (r-1)r(r+1) \end{aligned}$$

も 6 で割り切れることがわかる。

(3) より、 $r$  が素数のとき、

$$S = r(r+1)(r+2) \text{ または } S = r(r+1)(2r+1)$$

であるから、 $S$  は 6 で割り切れる。

(証明おわり)

(注)

1° (1) とは逆に、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たす自然数  $a, b, c$  が互いに素ならば、ある自然数  $n, m$  を用いて

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

と表される。

2° 三角形の 3 辺の長さ  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = c^2$  を満たす自然数というだけで、内接円の半径は (正の) 整数であることが示される。

3° (2) において、(本問では  $r$  が自然数なので)

$$r(r+1)(2r+1) = 6 \sum_{k=1}^r k^2$$

を 6 で割り切れる根拠としてもよい。

4° 実は、 $r$  が素数であることに関係なく、 $S$  は 6 で割り切れる。その証明を (4) の解答としてもよい。

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn$$

であるから、 $n$  と  $m$  がともに奇数ならば

$$n = 2N + 1, \quad m = 2M + 1 \quad (N, M \text{ は整数})$$

と表されて、

$$a = n^2 - m^2 = 4(N^2 + N) - 4(M^2 + M) \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$

であり、 $n$  または  $m$  が偶数ならば  $b = 2mn$  は 4 の倍数であるから、任意の自然数  $n, m$  に対して

$ab$  は 4 で割り切れる。

$n$  も  $m$  も 3 で割り切れないときは、

$$n = 3N \pm 1, \quad m = 3M \pm 1 \quad (N, M \text{ は整数})$$

と表されて,

$$a = n^2 - m^2 = 3(3N^2 \pm 2N) - 3(3M^2 \pm 2M) \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

であり,  $n$  または  $m$  が 3 で割り切れるときは  $b = 2mn$  は 3 の倍数であるから, 任意の自然数  $n, m$  に対して

$ab$  は 3 で割り切れる。

4 と 3 は互いに素であるから,  $ab$  は 12 で割り切れ,

$$S = \frac{1}{2}ab \text{ は } 6 \text{ で割り切れる。}$$

(証明おわり)