

数チャレ 第159回(2014年4月)

A は3桁の自然数で、その百の位の数 x 、十の位の数 y 、一の位の数 z は、

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

を満たしている。

- (1) $6!$ の値を求め、 x, y, z はすべて5以下であることを示せ。
- (2) x は3以下であることを示せ。
- (3) y, z のうち少なくとも1つは5であることを示せ。
- (4) A を求めよ。

出典：2014年 愛媛大学

解答

- (1) x, y, z の少なくとも1つが6以上であるとすれば、

$$A = x! + y! + z! > 6! = 720$$

であるから

$$x \geq 7$$

となるが、そのとき

$$A = x! + y! + z! > 7! = 5040$$

となって A が3桁の自然数であることに反する。よって、 x, y, z はすべて5以下である。 (証明おわり)

- (2) (1)より

$$100x + 10y + z = x! + y! + z! \leq 5! + 5! + 5! = 360$$

であるから、

$$x \leq 3$$

(証明おわり)

- (3) (2)より $x \leq 3$ であるから、 $y \leq 4$ かつ $z \leq 4$ であるとすれば、

$$A = x! + y! + z! \leq 3! + 4! + 4! = 54$$

となって、 A が3桁の自然数であることに反する。よって、 y, z のうち少なくとも1つは5である。 (証明おわり)

- (4) (1), (3)を踏まえて、

$$(i) y = z = 5 \quad (ii) y = 5, z \leq 4 \quad (iii) y \leq 4, z = 5$$

に分けて考える。

(i) $y = z = 5$ のとき

(2)より $1 \leq x \leq 3$ であるから

$$241 \leq x! + 5! + 5! \leq 246$$

であり,

$$x = 2$$

が必要であるが, このとき

$$255 \neq 2! + 5! + 5! = 242$$

であるから, 条件を満たさない。

(ii) $y = 5, z \leq 4$ のとき

$$100x + 50 + z = x! + 5! + z! \leq 3! + 5! + 4! = 150$$

より

$$x = 1$$

であるから,

$$100 + 50 + z = 1 + 5! + z! \quad \therefore z! = z + 29$$

$0 \leq z \leq 4$ より $29 \leq z + 29 \leq 33$ であり,

$$4! < z + 29 < 5!$$

であるから, 条件を満たさない。

(iii) $y \leq 4, z = 5$ のとき

(ii)と同様

$$x = 1$$

であり,

$$100 + 10y + 5 = 1 + y! + 5! \quad \therefore y! = 10y - 16$$

$0 \leq y \leq 4$ より $10y - 16 = -16, -6, 4, 14, 24$ であるから, $y!$ に一致するのは

$$y = 4$$

に限られる。

以上より, 条件を満たす 3 桁の自然数 A は

$$A = 145 \quad (\text{答})$$