

数チャレ 第160回 (2014年5月)

xy 平面上の曲線 $C : x^3 + y^3 = 26$ を考える。 C 上の点 $P(a, b)$ で、 a, b がともに有理数のとき P を C 上の有理点という。例えば $(-1, 3)$ や $(\frac{53}{28}, \frac{75}{28})$ は C 上の有理点である。 $h(x) = \frac{x(-x^3 + 52)}{2x^3 - 26}$ とおく。

- (1) $a^3 + b^3 = 26$ ($a \neq \sqrt[3]{13}, b \neq \sqrt[3]{13}$) のとき、 $\{h(a)\}^3 + \{h(b)\}^3$ の値を求めよ。
- (2) 有理数 $\frac{p}{q}$ (p, q は互いに素な整数で $q > 0$) に対して、 $h(\frac{p}{q})$ を $\frac{p'}{q'}$ (p', q' は互いに素な整数で $q' > 0$) と表す。 p が奇数ならば、 p' は奇数で $q' \geq 2q$ であることを証明せよ。ただし、2つの整数が互いに素とは、その最大公約数が1であることをいう。
- (3) C 上には無数の有理点が存在することを証明せよ。

出典：2014年 京都府立医科大学

解答

- (1) $a^3 + b^3 = 26$ ($a \neq \sqrt[3]{13}, b \neq \sqrt[3]{13}$) のとき

$$\begin{aligned}
 h(a)^3 + h(b)^3 &= \frac{a^3(-a^3 + 52)^3}{(2a^3 - 26)^3} + \frac{b^3(-b^3 + 52)^3}{(2b^3 - 26)^3} \\
 &= \frac{a^3(b^3 + 26)^3}{(a^3 - b^3)^3} + \frac{b^3(a^3 + 26)^3}{(b^3 - a^3)^3} \\
 &= \frac{a^3(b^3 + 26)^3 - b^3(a^3 + 26)^3}{(a^3 - b^3)^3} \\
 &= \frac{a^3b^3(b^6 - a^6) + 3 \cdot 26a^3b^3(b^3 - a^3) + 26^3(a^3 - b^3)}{(a^3 - b^3)^3} \\
 &= \frac{-a^3b^3(a^3 + b^3) - 3 \cdot 26a^3b^3 + 26^3}{(a^3 - b^3)^2} \\
 &= \frac{-26a^3b^3 - 3 \cdot 26a^3b^3 + 26(a^3 + b^3)^2}{(a^3 - b^3)^2} \\
 &= \frac{26\{-4a^3b^3 + (a^3 + b^3)^2\}}{(a^3 - b^3)^2} \\
 &= \frac{26(a^3 - b^3)^2}{(a^3 - b^3)^2} \\
 &= 26 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$(2) \ h\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\frac{p}{q}\left(-\frac{p^3}{q^3} + 25\right)}{2 \cdot \frac{p^3}{q^3} - 26} = \frac{p(-p^3 + 52q^3)}{2q(p^3 - 13q^3)}$$

$d = \gcd(p(-p^3 + 52q^3), 2q(p^3 - 13q^3))$ とおくと

$$p(-p^3 + 52q^3) = dp' \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2q(p^3 - 13q^3) = dq' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。

p が奇数ならば、 $-p^3 + 52q^3$ も奇数であるから、 $\textcircled{1}$ より約数 p' も奇数である。

$\gcd(p, q) = 1$ より

$$\gcd(-p^3 + 52q^3, q) = \gcd(-p^3, q) = 1$$

であり、 $p(-p^3 + 52q^3)$ は奇数であるから、 $2q$ は $p(-p^3 + 52q^3)$ と互いに素である。

$\textcircled{1}$ より

$2q$ と d は互いに素

であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$2q \mid q'$$

q も q' も正の整数であるから

$$2q \leq q' \quad (\text{証明おわり})$$

(3) $a_1 = -1, b_1 = 1, c_1 = 3, d_1 = 1$ とし、

$$h\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \quad \gcd(a_{n+1}, b_{n+1}) = 1, \quad b_{n+1} > 0$$

$$h\left(\frac{c_n}{d_n}\right) = \frac{c_{n+1}}{d_{n+1}}, \quad \gcd(c_{n+1}, d_{n+1}) = 1, \quad d_{n+1} > 0$$

により、整数からなる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ を定める。

(1)より点 $P_n\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}\right)$ は C 上の有理点であり、 a_1, c_1 は奇数であるから、(2)より

$$\text{つねに } b_{n+1} \geq 2b_n, \quad d_{n+1} \geq 2d_n$$

特に

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots, \quad 0 < d_1 < d_2 < d_3 < \dots$$

であるから、点 P_n はすべて相異なり、 C 上には無数の有理点 P_n が存在する。

(証明おわり)