

数チャレ 第161回 (2014年6月)

自然数 n に対して, 和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。

- (1) 各自然数 n に対して $2^k \leq n$ をみたす最大の整数 k を $f(n)$ で表するとき, 2つの奇数 a_n, b_n が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$$

と表されることを示せ。

- (2) $n \geq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

- (3) さらに, 自然数 m, n ($m < n$) に対して, 和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える。 $S_{m,n}$ はどんな m, n ($m < n$) に対しても整数にならないことを示せ。

出典: 2014年 千葉大学 理学部, 医学部

解答

- (1) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ が

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} \quad (f(n) = [\log_2 n], \quad a_n, b_n \text{ は奇数})$$

と表されることを数学的帰納法で証明する。

1° $n = 1$ のとき

$f(1) = 0$ であるから, $a_1 = b_1 = 1$ とすると,

$$S_1 = \frac{a_1}{2^{f(1)}b_1}$$

が成り立つ。

2° $S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ ($2 \nmid a_n b_n, \quad 2^{f(n)} \leq n < 2^{f(n)+1}$) と表されるとすれば,

$$S_{n+1} = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n(n+1) + 2^{f(n)}b_n}{2^{f(n)}b_n(n+1)}$$

(i) $n + 1$ が奇数のとき

$f(n + 1) = f(n)$ であり, $n + 1 \geq 3$ より

$$f(n + 1) = f(n) \geq 1$$

であるから,

$$a_n(n + 1) + 2^{f(n)}b_n, \quad b_n(n + 1) \text{ はともに奇数}$$

であり,

$$a_{n+1} \mid a_n(n + 1) + 2^{f(n)}b_n, \quad b_{n+1} \mid b_n(n + 1)$$

であるから, a_{n+1}, b_{n+1} はともに奇数である。

(ii) $n + 1 = 2^{f(n+1)}$ のとき

$f(n + 1) = f(n) + 1$ であるから,

$$S_{n+1} = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} + \frac{1}{2^{f(n+1)}} = \frac{2a_n + b_n}{2^{f(n+1)}b_n}$$

であり, $a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n$ はともに奇数である。

(iii) $n + 1$ が偶数で, $n + 1 > 2^{f(n+1)}$ のとき

$$n + 1 = 2^m c \quad (m \text{ は正の整数, } c \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数})$$

とおくと,

$$2^{m+1} < n + 1, \quad m + 1 \leq f(n + 1) = f(n)$$

であるから,

$$S_{n+1} = \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} + \frac{1}{2^m c} = \frac{a_n c + 2^{f(n)-m} b_n}{2^{f(n)}b_n c}$$

ここで, $f(n) > m$ より

$$a_n c + 2^{f(n)-m} b_n \text{ は奇数}$$

であり,

$$a_{n+1} \mid a_n c + 2^{f(n)-m} b_n, \quad b_{n+1} \mid b_n c$$

であるから, a_{n+1}, b_{n+1} はともに奇数である。

(i), (ii), (iii) より,

$$S_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{f(n+1)}b_{n+1}} \quad (f(n + 1) = [\log_2(n + 1)], \quad a_{n+1}, b_{n+1} \text{ は奇数})$$

と表される。

1°, 2° より, すべての自然数について成り立つことが示された。 (証明おわり)

(2) (1)の表示において, a_n と $2^{f(n)}$ は互いに素である。 $n \geq 2$ のとき $2^{f(n)} \geq 2$ であるから, S_n は整数でない。 (証明おわり)

(3) (1)と同じ記号を用いて,

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= S_n - S_{m-1} \\ &= \frac{a_n}{2^{f(n)}b_n} - \frac{a_{m-1}}{2^{f(m-1)}b_{m-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n b_{m-1} - 2^{f(n)-f(m-1)} a_{m-1} b_n}{2^{f(n)} b_{m-1} b_n}$$

(i) $f(m-1) < f(n)$ のとき

$a_n b_{m-1} - 2^{f(n)-f(m-1)} a_{m-1} b_n$ は $2^{f(n)}$ と互いに素な奇数であり, $2^{f(n)} \geq 2$ であるから, $S_{m,n}$ は整数でない。

(ii) $f(m-1) = f(n) = k$ のとき

$$2^k \leq m-1 < n < 2^{k+1}$$

であるから,

$$0 < S_{m,n} < \frac{1}{m-1} \cdot \{n - (m-1)\} \leq \frac{2^{k+1} - 2^k}{2^k} = 1$$

であり, $S_{m,n}$ は整数でない。

(証明おわり)