

数チャレ 第162回 (2014年7月)

$(n-2)^n < (n-1)^{n-1}$ を満たす3以上の整数 n をすべて求めよ。必要ならば、自然対数の底 e が $\frac{5}{2} < e < 3$ であることを用いてもよい。

解答

$n \geq 3$ において

$$\begin{aligned} (n-2)^n < (n-1)^{n-1} &\iff n \log(n-2) < (n-1) \log(n-1) \\ &\iff \frac{\log(n-2)}{n-1} < \frac{\log(n-1)}{n} \end{aligned}$$

であることを考えて、

$$f(x) = \frac{\log(x-1)}{x} \quad (x \geq 2)$$

とおき、増減を調べる。

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1} \cdot x - \{\log(x-1)\} \cdot 1}{x^2} = \frac{x - (x-1) \log(x-1)}{x^2(x-1)}$$

さらに、

$$g(x) = x - (x-1) \log(x-1) \quad (x \geq 2)$$

とおくと、 $x > 2$ において

$$g'(x) = 1 - 1 \cdot \log(x-1) - (x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = -\log(x-1) < 0$$

であるから、 $g(x)$ は $x \geq 2$ において狭義単調減少である。

$$g(2) = 2 > 0$$

$$g(4) = 4 - 3 \log 3 = \log \frac{e^4}{3^3} > \log \frac{1}{27} \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \log \frac{625}{432} > 0$$

$$g(5) = 5 - 4 \log 4 = \log \frac{e^5}{4^4} < \log \frac{3^5}{4^4} = \log \frac{243}{256} < 0$$

よって、 $g(\alpha) = 0$ 、 $4 < \alpha < 5$ を満たす実数 α が存在して

x	2	α	$(+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	↗ 極大 ↘	

これより、

$$f(2) < f(3) < f(4) < f(\alpha) > f(5) > f(6) > \dots$$

ここで、

$$f(5) - f(4) = \frac{\log 4}{5} - \frac{\log 3}{4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \log 4 - 5 \log 3}{20} \\ &= \frac{1}{20} \log \frac{4^4}{3^5} \\ &= \frac{1}{20} \log \frac{256}{243} > 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$f(2) < f(3) < f(4) < f(5) > f(6) > \dots\dots$$

以上より, $f(n-1) < f(n)$ を満たす実数 $n (\geq 3)$ は

$$n = 3, 4, 5 \quad (\text{答})$$

(注) $n \leq 5$ について直接確認して, $n \geq 6$ において不成立を示してもよい。